Phương pháp tính

Nguyễn Hồng Quang

Email: quangnh@hus.edu.vn
SĐT: 096-451-7700
Link bài giảng:
https://quangnh.daingu.vn/
hmo2201-Phuong_phap_tinh/
Và: https://gitlab.smartemail.vn/bai_giang/
hmo2201-Phuong_phap_tinh

Yêu cầu môn học

- Mục tiêu: lập trình để giải các bài toán thực tế trong quá trình học hay công việc sau này.
- Giải được các bài toán đơn giản và cho ra các kết quả dưới dạng số. Như giải phương trình một biến số hay hệ phương trình, tính tích phân hữu hạn của một hàm số, .. dưới dạng số.
- Ước lượng được sai số của nghiệm số tìm được.
- Biết sử dụng MATLAB để vẽ hình.

Tài liêu tham khảo

- Phương pháp tính, Tạ Văn Đĩnh, Nhà xuất bản giáo dục 1999.

Phương pháp học

- Slice sẽ giới thiệu về thuật toán dưới dạng các bước (thuật toán chẩn Mackov), lưu đồ và ví dụ thực hiện trên máy trên ngôn ngữ MATLAB.
- Kết hợp giảng chi tiết trên bảng, ví dụ làm bằng tay.
- Sinh viên làm bài tập về nhà. Lấy trung bình để đánh giá điểm thường xuyên.
- Sinh viên làm làm một bài tập trên bảng, kết quả dùng đánh giá điểm điểm thường xuyên.

Bài tập

- Bài tập về nhà: mỗi chương được phát 1 bài tập về nhà. sv làm và nộp lại. mỗi bài được đánh giá theo thang 10.
- Trung bình các bài tập về nhà, cộng với điểm làm bài tập trên lớp, dùng làm điểm thường xuyên.

Phương pháp đánh giá

- Định nghĩa: **Chăm học là biết cách làm bài.**

  Kết quả làm bài tập ở nhà, bài tập trên lớp dùng làm điểm thường xuyên - được hiểu là thường xuyên học.

- Thi viết : điểm giữa kỳ và cuối kỳ.
- **Bài tập lớn - không bắt buộc**: Lập trình được trên một ngôn ngữ bất kỳ để giải một bài toán theo một phương pháp nào đó (có kiểm tra vấn đáp trực tiếp).

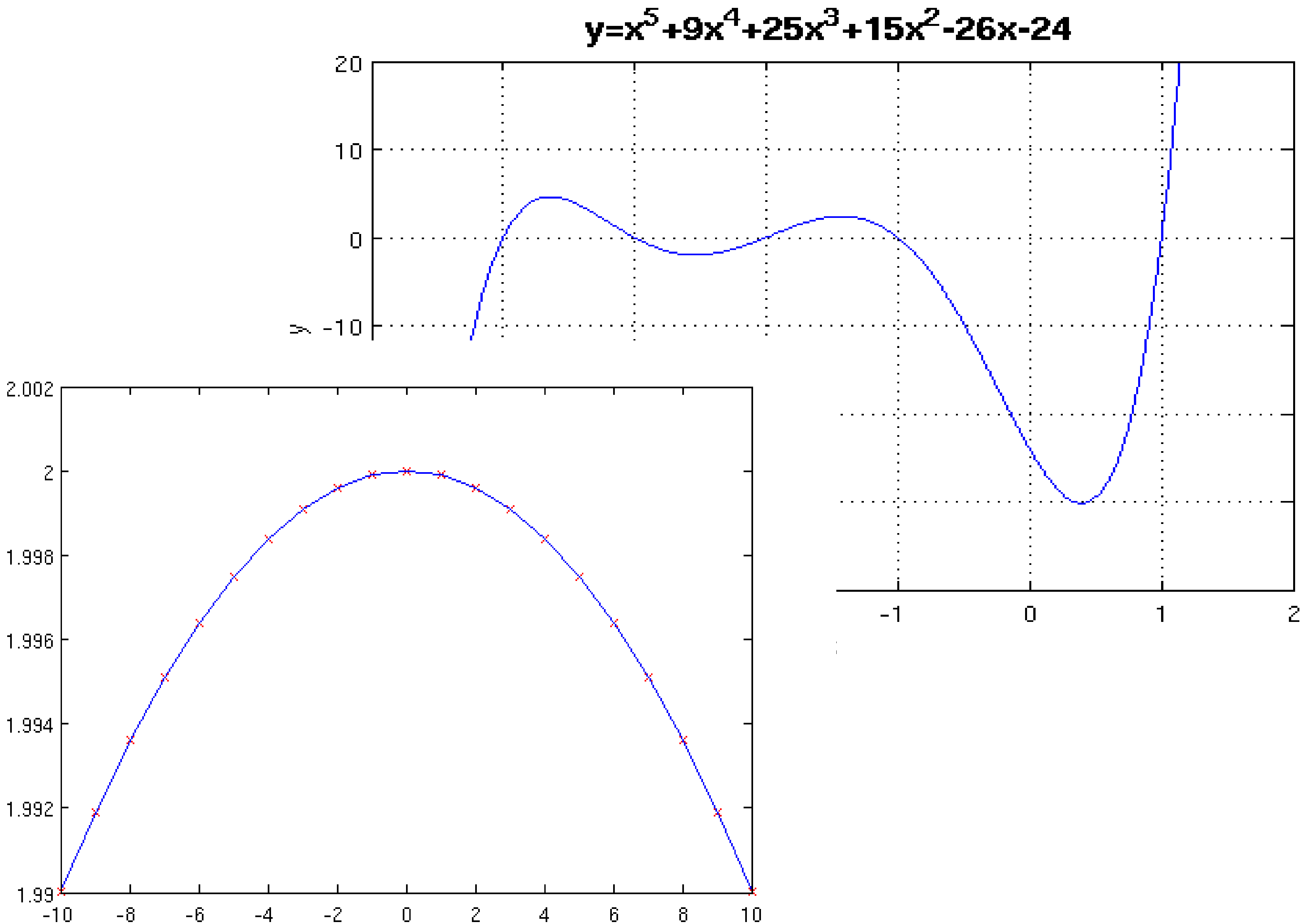
  Đạt được: đạt yêu cầu tối đa của môn hoc, nên:

  Điểm thường xuyên và giữa kỳ: 10 (tối đa).

  Ưu tiên khi chấm điểm cuối kỳ.

- Sinh viên không làm bài tập bị coi là không thường xuyên học nên:

  Điểm thường xuyên: 5.



y=x5+9x4+25x3+15x2-26x-24
20
10
0
-10
y
-1
0
1
2
2.002
2
1.998
1.996
1.994
1.992
1.99
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

Khái niệm về sai số

- Mọi thứ đều có sai số. Sai số được chia làm ba loại:
  - Sai số đo đạc: là sai số phát sinh trong quá trình đo đạc, chủ yếu do chủ quan của người đo. Sai số này tuân theo quy luật ngẫu nhiên, và có phổ đều (phổ trắng)
  - Sai số hệ thống: Trong đo đạc, sai số này phát sinh do phương pháp đo, hệ thống máy móc,... Trong mô hình, sai số này phát sinh do phương pháp mô hình hóa, ..
  - Sai số làm tròn: là sai số do làm tròn số trong quá trình tính toán, xử lý, lưu trữ số liệu.

Chữ số có nghĩa

- Bắt đầu từ chữ số khác không đầu tiên.
- Kết thúc bởi chữ số cuối cùng.
- Lưu ý là chữ số 0 nằm ở cuối cũng là chữ số có nghĩa.
- Ví dụ:
  - Số 001234, thì số hai số 0 đầu tiên là hai số không có nghĩa.
  - Số 1234000 thì số ba số 0 cuối là ba chữ số có nghĩa. Nhưng khi biểu diễn dưới dạng $1234*10^3$ thì chữ số có nghĩa cuối cùng là số 4.
  - Số 1.2345000 thì ba chữ số 0 cuối là chữ số có nghĩa.

Cách viết sai số

- Cách viết một giá trị có sai số:
  - A = 10.5 ± 0.5 ($10 \leq A \leq 11$) (sai số tuyệt đối)
  - A = 10 ± 10% ($9 \leq A \leq 11$) (sai số tương đối)
  - A = 12 (- 1; + 2)($11 \leq A \leq 14$)
  - Khi viết một số có sai số thì chữ số có nghĩa cuối cùng của số và sai số phải cùng bậc với nhau.

Sai số của biểu thức đơn giản

- Tính sai số của biểu thức đơn giản:

$$d\left(x+y\right) = dx+dy$$

$$d\left(x*y\right) = ydx + xdy$$

$$\rightarrow \frac{d\left(x*y\right)}{x*y} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

- Sai số tuyệt đối: tiện lợi khi làm phép cộng.
- Sai số tương đối: tiện lợi khi làm phép nhân.

Sai số của biểu thức

- Tính sai số của biểu thức:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ \dfrac{dy}{dx} = f'(x) \end{array}\right\} \quad dy = f'(x) * dx$$

$$C = f(x, y)$$

$$\Rightarrow dC = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy$$

Quy trình giải một bài toán số

- Xác định khoảng nghiệm
- Xấp xỉ các biểu thức phức tạp bằng các biểu thức đơn giản.
- thu hẹp dần khoảng nghiệm đến một giá trị nào đó chấp nhận được.
  - phương pháp chia đôi – bisection
  - phương pháp lặp – lagrande
  - phương pháp tiếp tuyến – Newton-Rapson
  - phương pháp dây cung

Xác định khoảng nghiệm

- Vẽ đồ thị hàm số.
- Xác định khoảng nghiệm gần đúng bằng đồ thị.

Khảo sát đồ thị hàm số

•Tính đạo hàm cấp 1, cấp 2.

•Tính giá trị hàm tại các điểm đạo hàm bằng 0, và một số điểm khác

•Vẽ hàm số này với các điểm này.

sử dụng công cụ máy tính để vẽ hàm số

MATLAB:

```
syms x
ezplot ('x^2+sin(x)')

x=1:0.01:10;
y=x.^2+sin(x)
plot(x,y)
```

y = x+sin(x)+1 = 0

- y'=1+cos(x)
- y''=-sin(x)
- y'=0 tại (2*n+1)*pi/2
- tính gía trị hàm tại n*pi/2.
- Vẽ hàm số.

MATLAB:

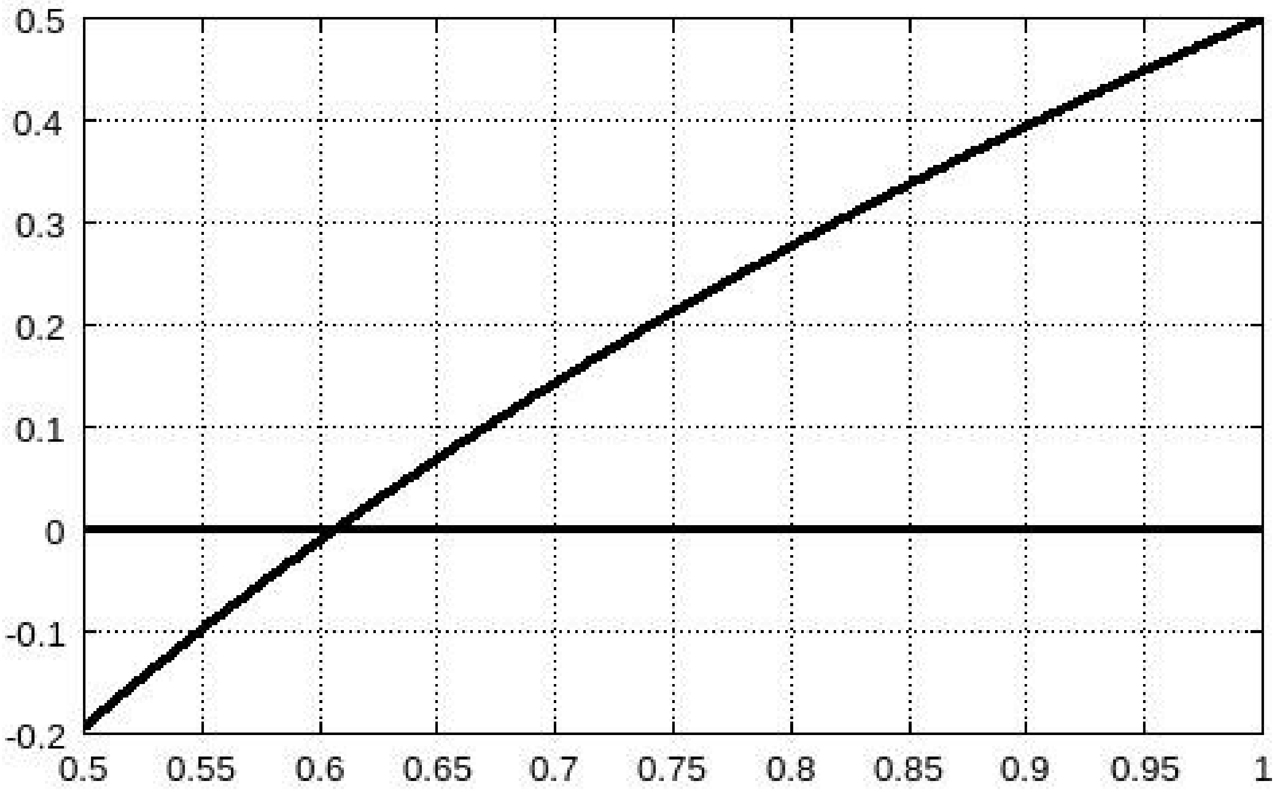
- ezplot('x+sin(x)+1')
- x=linspace(-5,5,100);

  y=x+sin(x)+1;

  plot(x,y)

Phương pháp chia đôi

- y=f(x) có số lẻ nghiệm trong khoảng (a,b), khi đó: f(a)*(b)<0



Phương pháp chia đôi

- Cách giải:
  - xác định c=(a+b)/2
  - tính f(c)
  - nếu f(a)*f(c)<0 thì nghiệm sẽ nằm trong khoảng (a,c), nếu không nghiệm nằm trong khoảng (c,b)
  - nếu khoảng nghiệm chưa đạt độ chính xác cần thiết thì lặp lại qua trình, nếu không thì nghiệm thu được là (a+b)/2 với sai số |a-b|/4

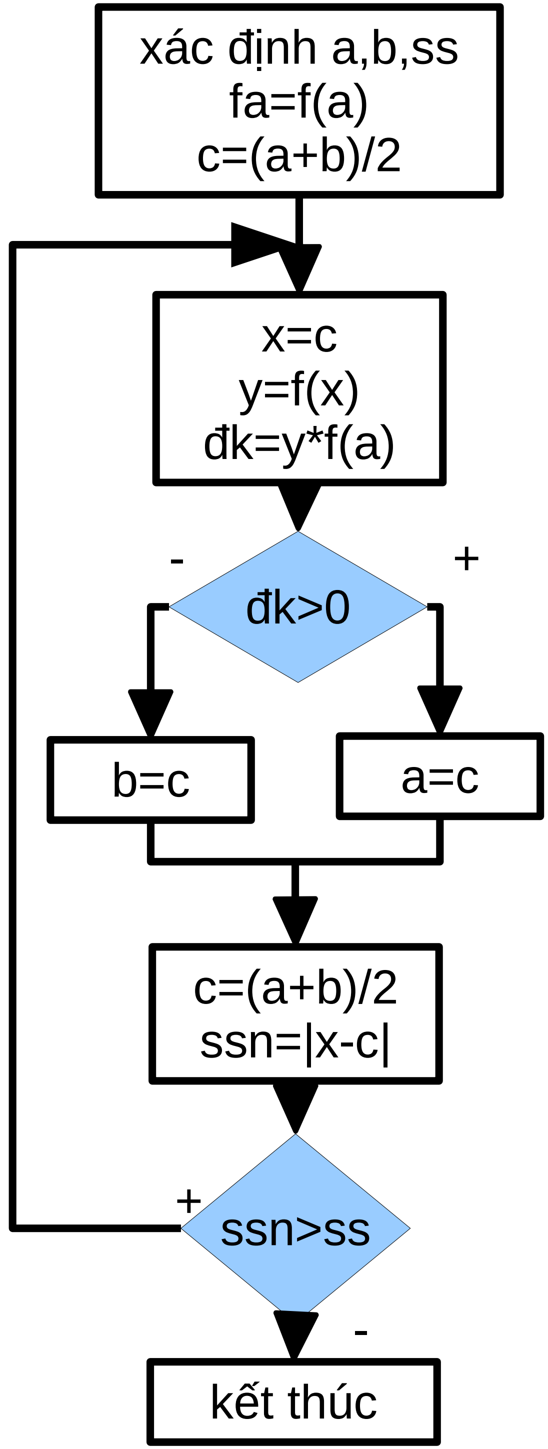
1) xác định [a,b],
sai số ss
2) Tính fa=f(a)
3) c=(a+b)/2

4) x=c
5) tính y=f(x)

6) kiểm tra đk=y*f(a)>0
nếu đk >0 thì a=c
nếu không b=c
7) tính c=(a+b)/2

8) xác định đkss= ss<|x-c|
nếu đkss đúng thì kết thúc
nếu không quay lại bước 4

9) kết thúc




```
xd=a;
xc=b;
xg=(a+b)/2;
fxd=hamso(xd)
ss= abs(a-b)/2

while ss>ssyc
    y=hamso(xg);
    dk=y*fxd;

    if dk>0
        xd=xg;
    else
        xc=xg;
    end;

    xg=(a+b)/2;
    ss= abs(a-b)/2

end;

disp xg

function y=hamso(x)
y=x.^2+sin(x)+1;
```

Cách giải thủ công

$$Giải\ phương\ trình: 2*x+\sin(x)+2=0\ với\ sai\ số\ 10^{-5}$$

Để giải phương trình này, trước tiên chúng ta phải tìm được khoảng nghiệm. Sử dụng phương pháp khảo sát hàm số. hàm số: y= 2x+sin(x)+2 có đạo hàm: y' = 2 + cos(x) > 0 với mọi x, y' không có nghiệm trong khoảng (-∞; ∞).

x	-∞	-2	0	∞
y'	+	+	+	+
y	-∞	-0.034	2	∞

Phương trình có nghiệm duy nhất trong khoảng: (-2;0)

Cách giải thủ công

a	c	b	f(a)	f(c)	|a+b|/2
-2	-1	0	-2.909	-0.8415	1
-1		0			

Phương pháp lặp

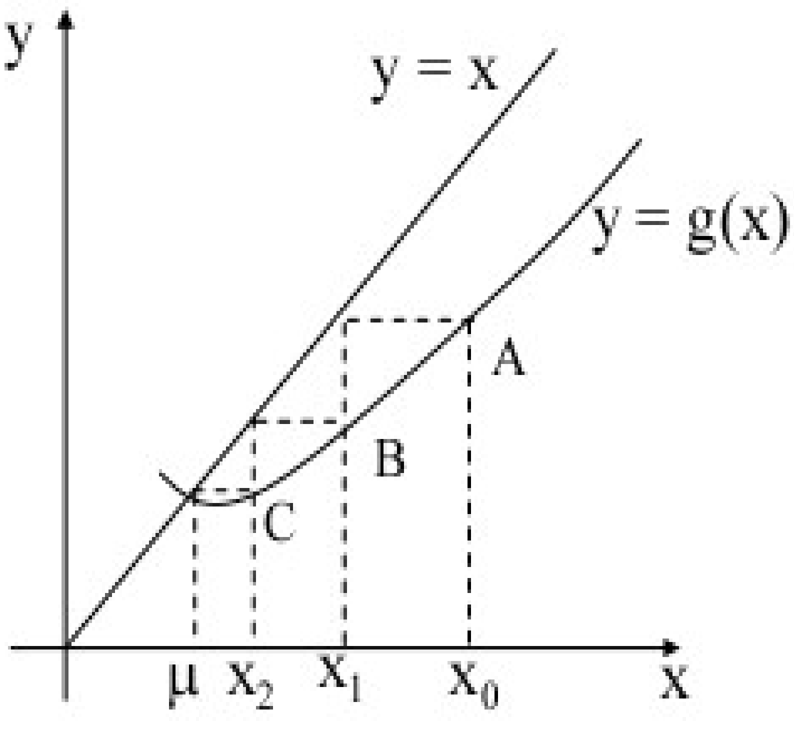
- Lagrange: nếu hàm $g(x)=x$ liên tục và có đạo hàm liên tục trong khoảng (a,b) thì tồn tại một số c thuộc (a,b) sao cho $g(a)-g(b)=g'(c)(a-b)$.
- Như vậy, Với nghiệm gần đúng ban đầu $x0$, chuỗi $x1 = g(x0)$, $x2 = g(x1)$,... sẽ hội tụ đến nghiệm chính xác x nếu $|g'(x)|<1$.
- Phương pháp này có hạn chế là phải xét điều kiện hội tụ $g'(x)$.

$$\underbrace{G(x_n)-G(x_{cx})}=G'(c)(x_n-x_{cx})$$

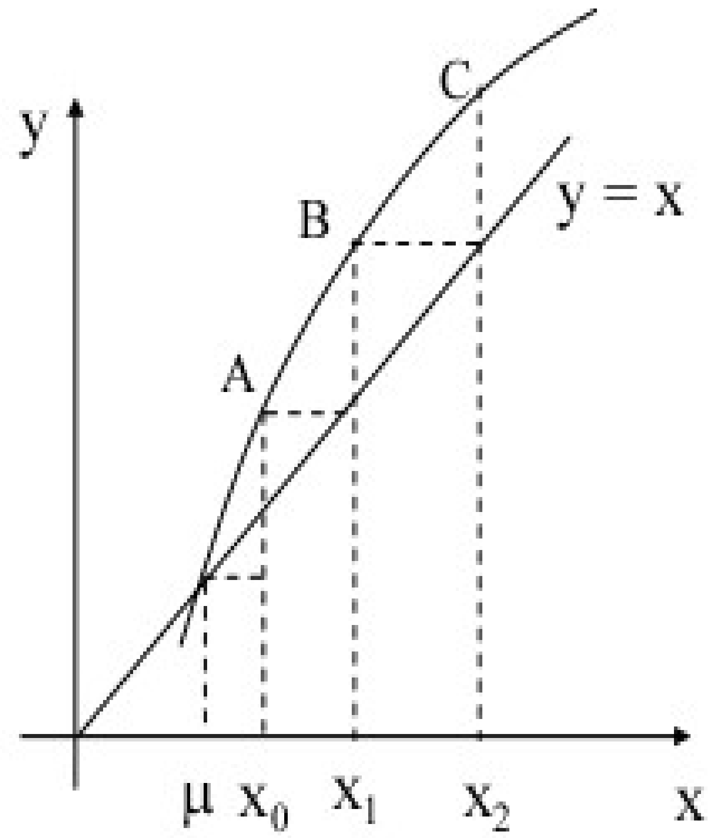
$$x_{n+1}-x_{cx} \qquad =G'(c)(x_n-x_{cx})$$

Như vậy nếu | G'(c) | < 1 thì chuỗi x_0 x_1 x_2,..x_n sẽ hội tụ dần đến nghiệm chính xác. G'(c) càng gần 0 thì tốc độ hội tụ càng nhanh, G'(c) càng gần 1 thì tốc độ hội tụ càng chậm. nếu G'(c) ~ 1/2 thì tốc độ hội tụ tương đương phương pháp chia đôi. Việc xác định hàm G do kinh nghiệm.

Minh họa điều kiện hội tụ



Hình a



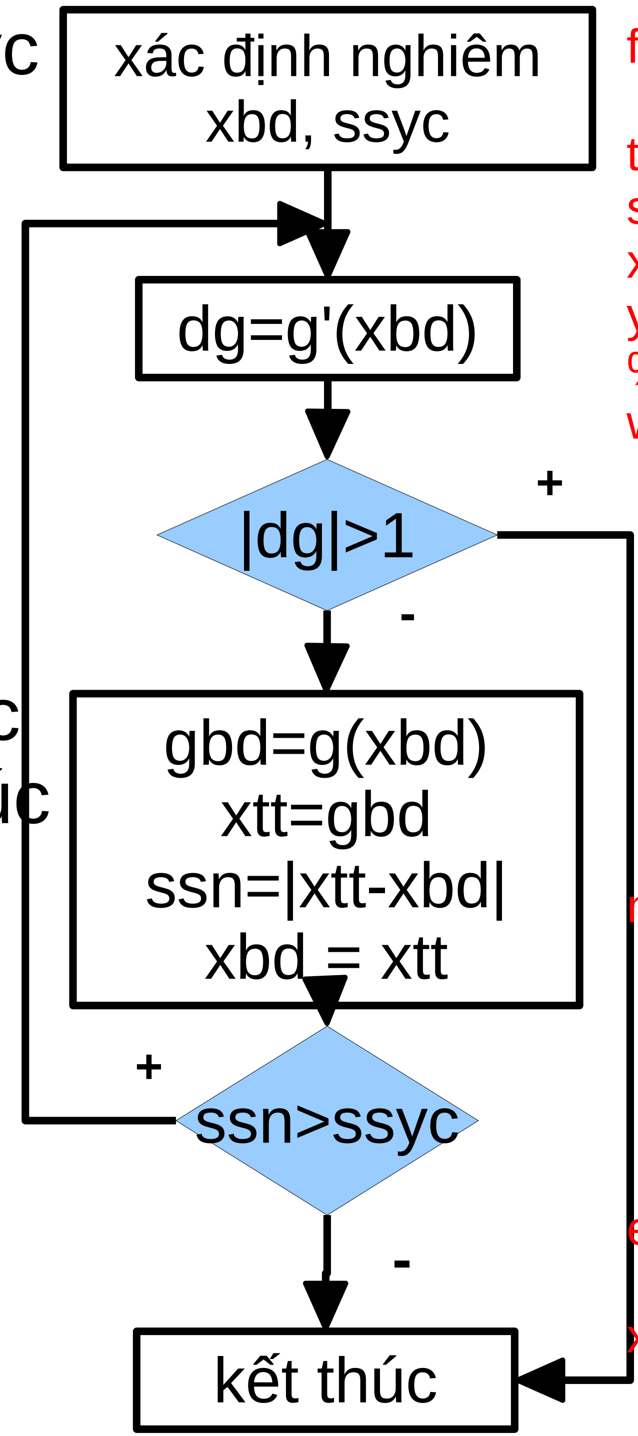
Hình b

1) xác định xbd, ssyc
2) nếu |g'(xbd)|>1
   thì kết thúc

3) tính gbd=g(xbd)
4) xtt=gbd
5) tính ssx=|xtt-xbd|

6) kiểm tra ssx>ssyc
   nếu đúng: kết thúc
7) xbd=xtt
8) quay lại bước 2

9) kết thúc




```
function [x,ss]=lap(x0,ssyc,f)

tol=1e-3;
ss=1e3;
xbd=x0;
y=inline(g,'-1 - sin(x)/2');
% PT: 2*x + sin(x) +2 =0
while ss>ssyc

  gxbd=g(xbd);
  dg=(-gxbd+g(xbd+tol))/tol;

  if dg<1
    xtt=gxbd;
  else
   disp(Lỗi: Hàm không thỏa
mãn.');
    break;
  end;

  ss=abs(xtt-xbd);
  xbd=xtt;
end;

x=xbd
```

Cách giải thủ công

$$Giải\ phương\ trình: 2*x+\sin\left(x\right)+2=0\ với\ sai\ số\ 10^{-5}$$

Để giải phương trình này, trước tiên chúng ta phải tìm được khoảng nghiệm. Sử dụng phương pháp khảo sát hàm số.
hàm số: y= 2x+sin(x)+2 có đạo hàm: y’ = 2 + cos(x) > 0 với mọi x, y’ không có nghiệm trong khoảng (-∞; ∞).

x	-∞	-2	0	∞
y’	+	+	+	+
y	-∞	-0.034	2	∞

Phương trình có nghiệm duy nhất trong khoảng: (-2;0)

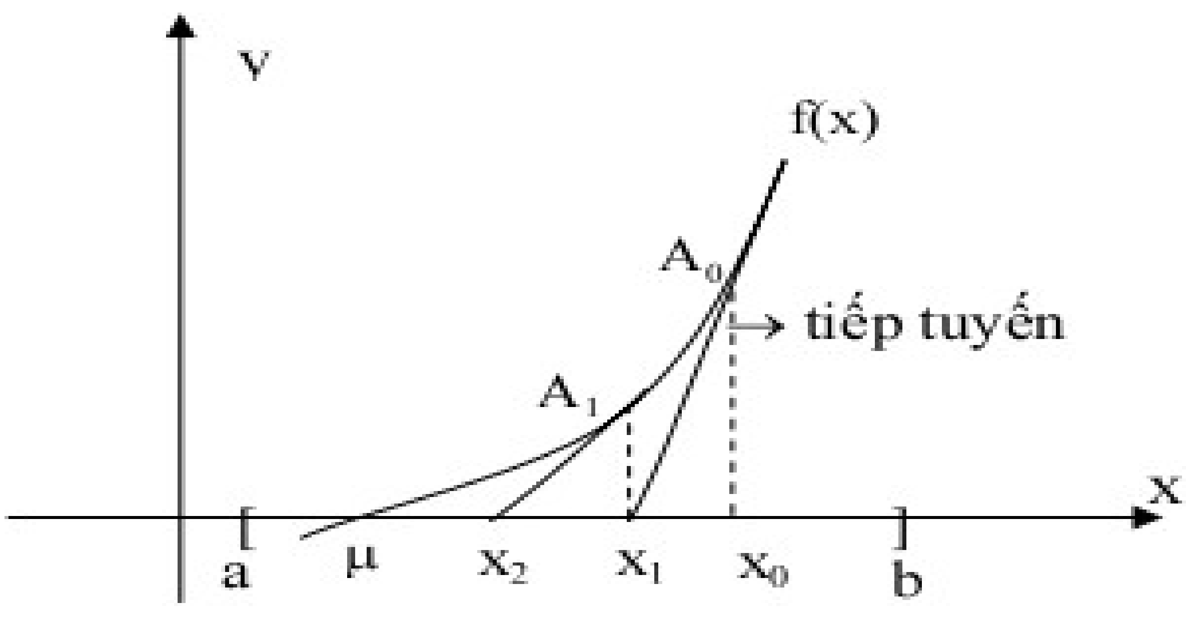
Cách giải thủ công

x	g(x)=-1-sin(x)/2	ss=|x-g(x)|
-1	-0.579264507596	0.42073549
-0.5792645	-0.726295711652	0.1470312
-0.7262957	-0.667947637422	0.05834807
-0.6679476	-0.690312002972	0.02236437
-0.690312	-0.681611108857	0.00870089
-0.6816111	-0.684977519149	0.00336641
-0.6849775	-0.683672199121	0.00130532
-0.6836722	-0.684177910096	0.00050571

Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

- Trong khoảng nghiệm (a,b) chọn nghiệm ban đầu x0, thì chuỗi $x_{k+1}=x_k-f\left(x_k\right)/f'\left(x_k\right)$

  hội tụ đến nghiệm x nếu f'(x) liên tục, không đổi dấu, không triệt tiêu trên đoạn (a,b) (hàm f(x) liên tục, đơn điệu trên đoạn (a,b))



1) xác định xbd, ssyc

2) tính dfbd=f'(xbd),

3) tính fbd=f(xbd)

4) xtt=xbd-fbd/dfbd

5) tính ssx=|xtt-xbd|

6) kiểm tra ssx<ssyc
nếu đúng: kết thúc

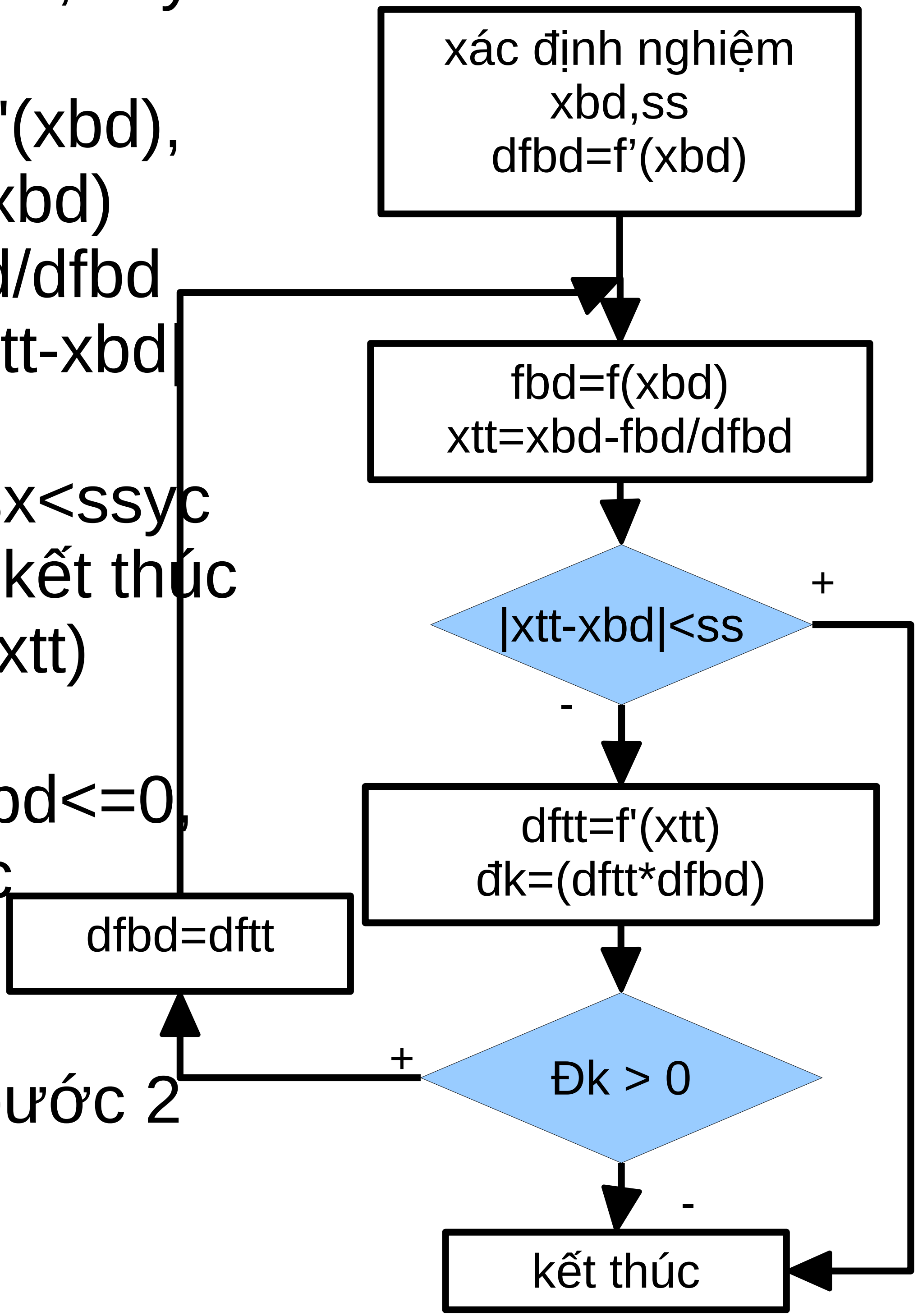
7) tính dftt=f'(xtt)

8) nếu dftt*dfbd<=0,
thì kết thúc

9) xbd=xtt

10) quay lại bước 2

11) kết thúc



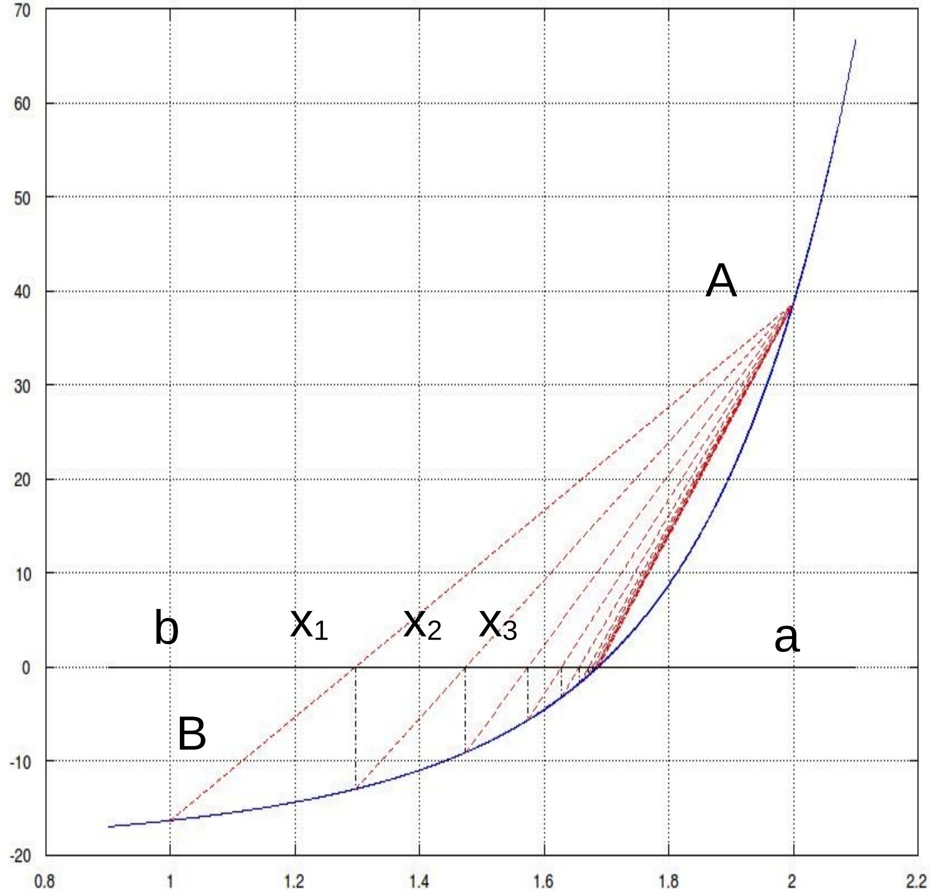

```
function [x,ss]=lap(x,ssyc,f
 tol=1e-7;
 ss=1e3;
 xbd=x0;
 dfxbd=df(xbd,tol);

 while ss>ssyc
  fbd=f(xbd);
  xtt=xbd-fbd/dfxbd;

  dfxtt=df(xtt,tol)
  if dfxbd*dftt<0
      break;
  end;

  ss=abs(xtt-xbd);
  xbd=xtt;
  dfxbd=dfxtt;
 End;

 x=xbd;

funtion dy=d1f(x,tol)
   dy=(y(x+tol)-y(x))/tol;

function y=f(x)
   y=x+sin(x);
```

Phương pháp dây cung

- Giả sử hàm f(x) có một nghiệm duy nhất trong khoảng [a,b]. lấy x_k là nghiệm của dây cung (A;B), khi đó chuỗi:

$$x_{k+1} = a - \frac{f(a)(a-b)}{f(a) - f(b)}$$

$$x_{k+1} = a - \frac{f(a)}{\left. f'(x) \right|_{x \in (a;b)}}$$



- sẽ hội tụ đến nghiệm x.

1) xác định a,b,
sai số ss

2) tính FA=f(a), FB=f(b),
c=a-FA*(b-a)/(FB-FA)

3) x=c

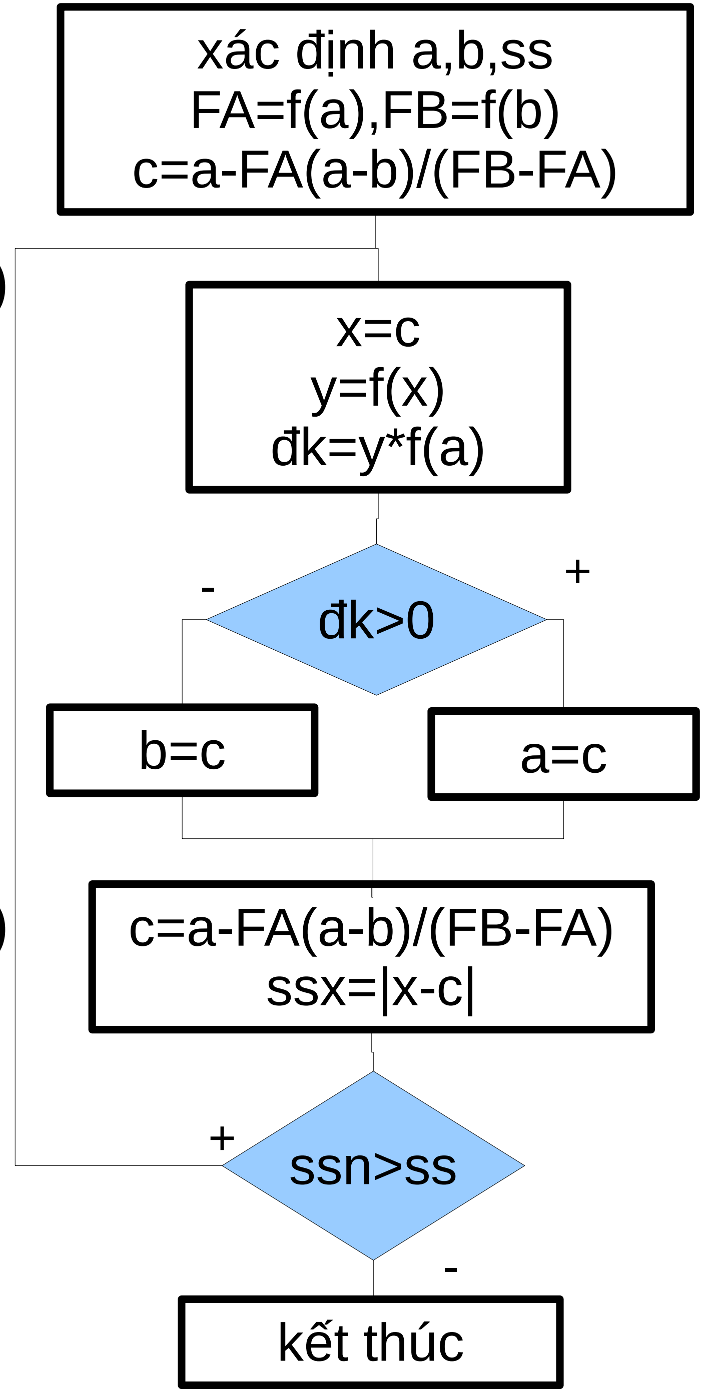
4) tính y=f(x)

5) kiểm tra đk=y*f(a)>0
nếu đk >0 thì a=c;
FA=y;
nếu không b=c;
FB=y;

6) tính
c=a-FA*(b-a)/(FB-FA)

7) xác định
đkss=ss<|x-c|
nếu đúng thì kết thúc
nếu không quay lại bước 3

8) kết thúc




```
function [x,ss]=dc(a,b,ss0,f)

tol=1e-3;
ss=1e3;
xbd=x0;
y=inline(f,'x');
x=a;

while ss>ss0

  FA=y(a); FB=y(b);
  c=a-FA*(b-a)/(FA-FB);

  FC=y(c);
  if FC*FA<1
    b=c;
  else a=c;
  end;

  ss=abs(x-c);
  x=c;
end;
```

Ước lượng sai số nghiệm

- Sai số: $$\Delta x = |x - x_{cx}| \leqslant \frac{f(x)}{min(f'(x))}$$

- Để đơn giản, thông thường người ta sử dụng sai số của nghiệm bằng sai lệch của 2 nghiệm xấp xỉ cuối cùng.
  - Chuỗi x_0, x_1, … x_{n-1}, x_n hội tụ đến nghiệm chính xác x, nên: $|x_1 - x_0| > |x_2 - x_1| > ... > |x_n - x_{n-1}| > |x_n - x|$
  - $\Delta x = |x_n - x_{n-1}| > |x - x_n|$ có thể sử dụng như sai số của nghiệm tính được.

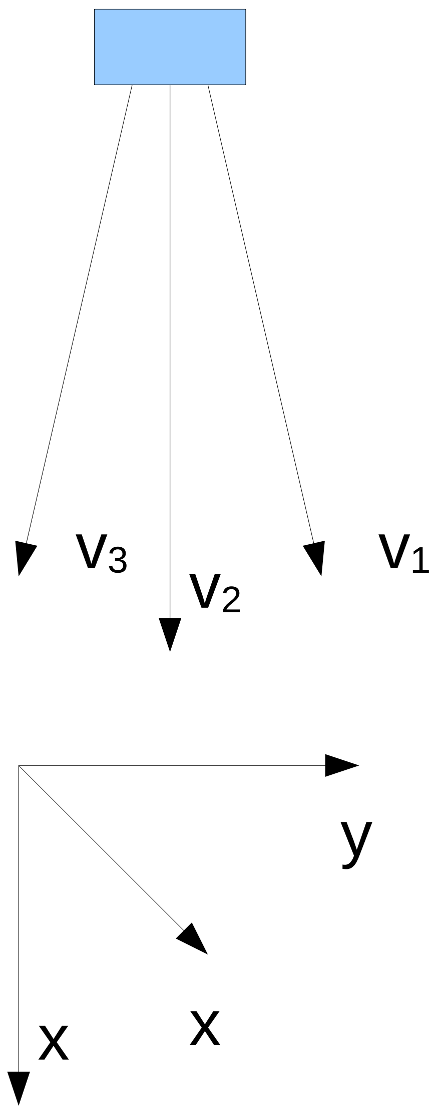
So sánh 4 phương pháp

	Chia đôi	Lặp	Tiếp tuyến	Dây cung
Điều kiện	không có	Chuyển phương trình về dạng x=g(x) với |g'| <1	Hàm đơn điệu	không có
Tốc độ hội tụ	Trung bình = 1/2	phụ thuộc |g'| (= |g'|)	phụ thuộc |f''|	phụ thuộc |f''|
Số lượng tính toán / 1 bước	1 lần tính hàm 2 phép cộng 1 phép nhân	1 lần tính hàm	1 lần tính hàm 1 lần tính đạo hàm 2 phép cộng 1 phép nhân	1 lần tính hàm 4 phép cộng 2 phép nhân

Bài tập

```
y = log(x.^2) + 2*x.^7 + 5;
y = log(x.^2) + 2*x.^3 + 4;
y = log(x.^2) + 4*x - 1;
y = log(2*x.^3) + 4*x - 1;
y = log(3*x.^4) + 4*x - 1;
y = log(3*x.^4) + 2*x.^3 + 10;
y = x.*log(3*x.^4) + 2*x - .5;
y = sin(x) + cos (x) + 3*x;
y = sin(2*x) + cos (3*x) + x^3 +10*x;
```

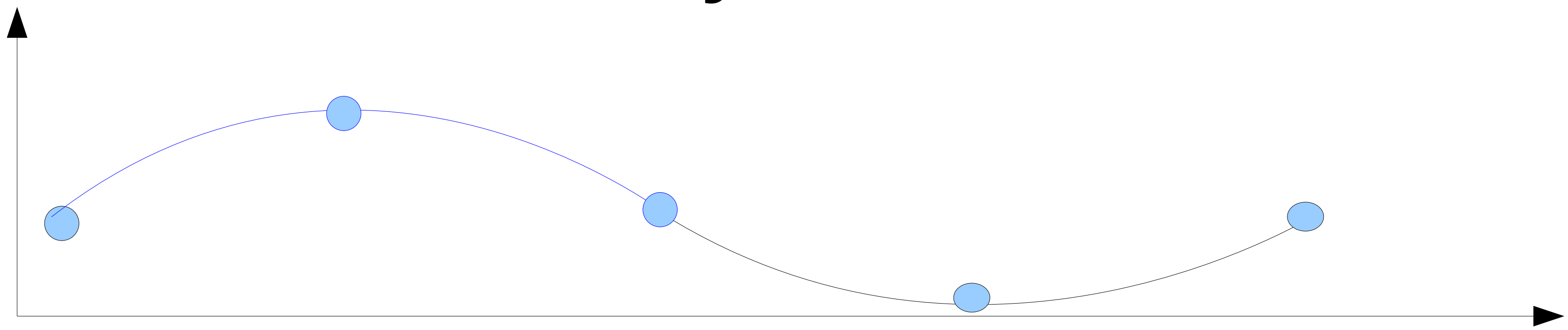
ADCP



$$v_1=a_1*x+b_1*y+c_1*z$$
$$v_2=a_2*x+b_2*y+c_2*z$$
$$v_3=a_3*x+b_3*y+c_3*z$$

$$Ax=v$$

Nội suy đa thức



$y=a_n*x^n+a_{n-1}*x^{n-1}+..+a_2*x^1+a_1*x^1+a_0$

$y(x_i)=y_i$

$Ax=y$

Hệ phương trình đại số tuyến tính

$$
\begin{array}{llllll}
a_{1,1}x_1 & +\, a_{1,2}x_2 & +\, \ldots & +\, a_{1,N-1}x_{N-1} & +\, a_{1,N}x_N & = b_1 \\
a_{2,1}x_1 & +\, a_{2,2}x_2 & +\, \ldots & +\, a_{2,N-1}x_{N-1} & +\, a_{2,N}x_N & = b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{M-1,1}x_1 & +\, a_{M-1,1}x_2 & +\, \ldots & +\, a_{M-1,N-1}x_{N-1} & +\, a_{M-11,N}x_N & = b_{M-1} \\
a_{M,1}x_1 & +\, a_{M,1}x_2 & +\, \ldots & +\, a_{M,N-1}x_{M-1} & +\, a_{M,N}x_N & = b_M
\end{array}
$$

$$
A = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,N-1} & a_{1,N} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,N-1} & a_{2,N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{M-1,1} & a_{M-1,2} & \ldots & a_{M-1,N-1} & a_{M-1,N} \\
a_{M,1} & a_{M,2} & \ldots & a_{M,N-1} & a_{M,N}
\end{vmatrix}
\quad
x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{vmatrix}
\quad
b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-1} \\ b_M \end{vmatrix}
$$

$$Ax = b$$

1) M=N: **(nội suy spline, giải hệ)**

det(A)<>0 - phương trình có nghiệm duy nhất có thể giải bằng các phương pháp trưc tiếp

det(A)=0 - phương trình có vô số nghiệm

2) M>N: (over-determine) **(nội suy đa thức,,..)**

det(A)<>0 - phương trình có nghiệm duy nhất có thể giải bằng các phương pháp trưc tiếp

det(A)=0 - phương trình có vô số nghiệm

3)M<N: (under-determine)

phương trình có vô số nghiệm - giải bằng cách sử dụng các thông tin tiên nghiệm: L-cuver, Regularziration,..

Phương pháp giải trực tiếp cho hệ phương trình duy nhất nghiệm (M=N)

Phương pháp định thức ([N+1]!N))

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

Phương pháp Gauss ([4N^3+9N^2-7N]/6)
Phương pháp lặp đơn
Phương pháp chéo hóa ma trận.
Phương pháp phân tích ma trận (SVD):

$$A = U S V^T \Rightarrow U S V^T x = b$$

$$\Rightarrow V\left[\left(S^T S\right)^{-1} S^T \left(U^T U\right) S\right] V^T x = V\left[\left(S^T S\right)^{-1} S^T\right] U^T b$$

$$\Rightarrow x = V S^{-1} U^T b$$

phương pháp bình phương tối thiểu (M>N - Over-determine)

xét bài toán đo sóng thủy triều có dạng ***h = a sin(kt+φ)***, chúng ta có N điểm đo. khi đó để tìm a, φ chúng ta cần giải N hệ phương trình dạng:εΔ

$$\begin{array}{ccc} h_1 & = & a\sin\left(kt_1+\varphi\right) \\ h_2 & = & a\sin\left(kt_2+\varphi\right) \\ h_3 & = & a\sin\left(kt_3+\varphi\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_N & = & a\sin\left(kt_N+\varphi\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} h_1 & = & b\sin\left(kt_1\right) & +c\cos\left(kt_1\right) \\ h_2 & = & b\sin\left(kt_2\right) & +c\cos\left(kt_2\right) \\ h_3 & = & b\sin\left(kt_3\right) & +c\cos\left(kt_3\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_N & = & b\sin\left(kt_N\right) & +c\cos\left(kt_N\right) \end{array}$$

$$h = Ax + \varepsilon$$

$$\Delta = \sum \left|\varepsilon^2\right|$$

Có nhiều cách để giải phương trình này:

a) Phương pháp giả nghịch đảo:

$$Ax = h \Rightarrow A^T A x = A^T h \Rightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T h$$

b) phương pháp phân tích ma trận QR:

$$A = QR \Rightarrow A^T A = R^T Q^T Q R = R^T R$$
$$\Rightarrow x = (R^T R)^{-1} A^T h$$

c) phương pháp phân tích ma trận SVD:

$$A = U S V^T \Rightarrow U S V^T x = h$$
$$\Rightarrow V[(S^T S)^{-1} S^T (U^T U) S] V^T x = V[(S^T S)^{-1} S^T] U^T h$$
$$\Rightarrow x = V S^{-1} U^T h$$

L-Cuver (M<N)

Chúng ta đưa vào một sai số: Ax + ε = y

=> ε = y-Ax => $\varepsilon^2 = (y-Ax)^T (y-Ax)$

$$L = \lambda x^T H x + (y - Ax)^T (y - Ax)$$

Chúng ta xác định λ và x sao cho L nhỏ nhất.

$$x = (A^T A + \lambda H)^{-1} A^T y$$

λ được xác định sao cho |Ax-y| nhỏ hơn sai s

Tính đạo hàm

Khai triển Taylor của hàm f(x) tại điểm x:

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x)$$

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{i=1}^{j}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x)+O(h^j)$$

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+O(h)$$

$$f(x-h)=f(x)-h\,f'(x)+O(h)$$

Tích phân xác định

- Phương pháp hình thang
- phương pháp simpson

Phương trình đạo hàm toàn phần

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y|_{x=x_0} = a$$

Điều kiện biên Cauchy

- Điều kiện biên:
  - Cauchy: Điều kiện trạng thái ở một bên biên, thường là biên thời gian (điều kiện ban đầu).

Phương pháp Taylor (Cauchy)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y|_{x=x_0} = a$$

Điều kiện biên Cauchy

$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = f(x_0, y(x_0))$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} f(x_0, y(x_0))$$

$$\cdots$$

$$\underbrace{\frac{d^ky}{dx^k}|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}|_{x=x_0} = \ldots}$$

Triển khai Taylor tại điểm x

$$y(x) = y(x_0) + \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} \frac{x-x_0}{1!} + .. + \frac{d^ky}{dx^k}|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^k}{k!} + \theta((x-x_0)^k)$$

Phương pháp Euler

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad y|_{x=x_0}=a$$

Điều kiện biên Cauchy

Taylor

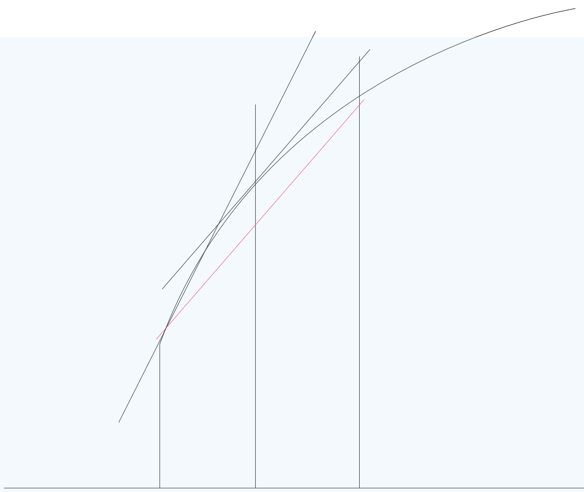
$$y(x_0+h)=y(x_0)+h\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}+\theta(h)$$

$$y(x_0+h)=y(x_0)+hf(x_0,y(x_0))$$

$$y(x_0+2\mathrm{h})=y(x_0+h)+hf(x_0+h,y(x_0+h))$$

$$\ldots$$

$$y(x_0+(N+1)h)=y(x_0+Nh)+hf(x_0+Nh,y(x_0+Nh))$$



$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0+h/2}\rightarrow y(x_0+h)=y(x_0)+hf(x_0+h/2,y(x_0+h/2))$$

Phương pháp điểm giữa (midpoint)

$$y(x_0+h)=y(x_0)+hf(x_0+h/2,y(x_0)+\frac{h}{2}f(x_0+h/2,y(x_0+h/2)))$$

Phương pháp hình thang

$$y(x_0+h)=y(x_0)+h\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=x_0}+\theta(h^2)$$ Taylor

$$\xrightarrow[\text{công thức ba điểm}]{} \quad 2\text{h}\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=y(x_0+h)-y(x_0-h)+\theta(h^2)$$

$$y(x_0+h)-y(x_0)=h\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0+h/2} \quad =\left(\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}+\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0+h}\right)/2$$

$$y(x_0+h)-y(x_0)=\frac{h}{2}\left(\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}+\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0+h}\right)$$

= k_1

$$y(x_0+h)-y(x_0)=\frac{h}{2}[f(x_{0,}y(x_0))+f(x_0+h,y(x_0+h))]$$

$$y(x_0+h)=y(x_0)+\frac{h}{2}f(x_{0,}y(x_0))+\frac{h}{2}f(x_0+h,y(x_0+h))$$

cải tiến: chọn nghiệm ban đầu bằng Euler: $y(x_0)+h\,f(x_0,y(x_0)) = y(x_0)+hk_1 = k_2$

Phương pháp Runge-Kutta

$$y(x_0+h)=y(x_0)+(ak_1+bk_2)h$$

$$k_1=f(x_0,y(x_0))$$

$$k_2=f(x_0+\alpha h,y(x_0)+\beta k_1 h)$$

$$a+b=1 \quad \alpha=\beta=\frac{1}{2b}$$

- a=b=1/2 ; α = β =1 → Runge-kutta 2[nd]
- a=0; b=1;α = β =1/2 → Midpoint

Điều kiện tối thiểu hóa sai số

Runge-Kutte 4[th]

$$k_3=f\left(x_0+\frac{h}{2},y(x_0)+\frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4=f(x_0+h,y(x_0)+h*k_3)$$

$$y(x_0+h)=y(x_0)+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$