

BÁO CÁO CUỐI KỲ

Môn: Phương pháp số trong Hải Dương học

Introduction: Phương pháp sai phân hữu hạn.

Sai phân hữu hạn được sử dụng để giải các bài toán đạo hàm riêng. Bài toán đạo hàm riêng là bài toán với phương trình liên hệ giữa các đạo hàm của các đại lượng.

Ví dụ: $\frac{dy}{dx} = x + C$

Chúng ta không quan tâm đến các đạo hàm này mà chỉ quan tâm đến đại lượng đó. Vì vậy, để giải quyết vấn đề, chúng ta có thể sử dụng các sai phân của đại lượng như là một xấp xỉ gần đúng của đạo hàm tại các điểm trong miền xác định của đại lượng mà chúng ta quan tâm.

Data & Method:

Bài toán: $y'' = 12x^2$, với $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

Về nguyên tắc giải, ta phân miền xác định của đại lượng thành một lưới gồm hữu hạn điểm (nút lưới) và trên mỗi điểm này ta xấp xỉ đạo hàm của đại lượng bằng sai phân của đại lượng. Như vậy, thay vì giải một phương trình liên quan giữa các đạo hàm riêng của đại lượng thì ta có một tập hợp các phương trình thể hiện mối tương quan giữa các giá trị tại các điểm nút lưới. Đó là **sai phân hữu hạn**.

Phương pháp giải:

Bài toán này ta chia thành lưới gồm 20 nút, khoảng cách mỗi nút là 0.05

Sử dụng sai phân trung tâm, ta có giá trị tại các điểm nút lưới có dạng:

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = 12x_i^2 \quad (*)$$

Với:

y_i là giá trị của y khi x ở vị trí i ($1 < i < 21$), $x_i = 0; 0.05; 0.1; 0.15; \dots; 1$.

h là khoảng cách giữa các giá trị đại lượng x .

Điều kiện biên: $y_1 = 0$, $y_{21} = 0$.

Từ phương trình (*) kết hợp với điều kiện biên, ta có tập hợp phương trình:

$$y_1 = 0$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = 12x_2^2 h^2$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 = 12x_3^2 h^2$$

$$y_3 - 2y_4 + y_5 = 12x_4^2 h^2$$

.....

$$Y_{19} - 2y_{20} + y_{21} = 12x_{20}^2 h^2$$

$$y_{21} = 0$$

Viết dưới dạng ma trận: $A.x = y$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{21 \times 21}$$

$$x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{20} \\ y_{21} \end{pmatrix}_{1 \times 21}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 12x_2^2 h^2 \\ 12x_3^2 h^2 \\ \dots \\ 12x_{20}^2 h^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{1 \times 21}$$

Giải bằng ngôn ngữ lập trình Matlab:

Matlab là ngôn ngữ chuyên dụng sử dụng cho toán và vật lý kỹ thuật. Với giao diện dễ nhìn cùng hướng dẫn dễ sử dụng, kèm theo đó là những câu lệnh toán học được tích hợp sẵn, Matlab là ngôn ngữ rất thích hợp để giải bài toán này.

Đây là chương trình sinh viên sử dụng trên Matlab

```
%nhap dieu kien de bai a, b, h
a = 0; %diem dau
b = 1; %diem cuoi
n = 20; %so nut luoi
h = (b-a)/n;
x = [a:h:b];
%tinh vector Y
y = zeros(n+1,1); %tao ma tran 0 y
y(1) = 0; %gan dieu kien bien dau
y(2:n) = 12*x(2:n).^2.*h^2;
y(n+1) = 0; %gan dieu kien bien cuoi
%tao ma tran A
A = zeros(n+1,n+1); %tao ma tran 0 A
```

```
for i = 2:n
    A(i,i-1) = 1; %tao 3 duong cheo
    A(i,i) = -2;
    A(i,i+1) = 1;
end
%chinh sua 2 dau
A(1,1) = 1;
A(n+1,n+1) = 1;
%giai phuong trinh A*x = y
x = A\y
```

Kết quả thu được:

i	x	y
1	1.00	0.00000
2	1.05	-0.04988
3	1.10	-0.09968
4	1.15	-0.14918
5	1.20	-0.19800
6	1.25	-0.24563
7	1.30	-0.29138
8	1.35	-0.33443
9	1.40	-0.37380
10	1.45	-0.40838
11	1.50	-0.43688
12	1.55	-0.45788
13	1.60	-0.46980
14	1.65	-0.47093
15	1.70	-0.45938
16	1.75	-0.43313
17	1.80	-0.39000
18	1.85	-0.32768
19	1.90	-0.24368
20	1.95	-0.13538
21	2.00	0.00000

Conclusion:

Sai phân hữu hạn cho ta phương pháp giải được hầu hết các bài toán đạo hàm riêng. Nó mang ứng dụng rất lớn, đặc biệt với các bài toán trong Hải dương học. Kết hợp với ngôn ngữ lập trình Matlab, chúng ta sẽ có những kết quả nhanh và chính xác.