

Họ tên: Trần Thị Thảo
Mã sv: 12001682

BÀI TẬP MÔN PHƯƠNG PHÁP SỐ TRONG HẢI DƯƠNG HỌC

Đề bài: Cho phương trình sóng $(\nabla^2 - \frac{1}{c^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2})P = 0$

Giải bài toán tìm mode dao động sóng (tìm P trong pt P(t)

Với $c(z) : C(0)=1500$

c = hàm tuyến tính theo độ sâu

$C(1000)=1450$

Với mật độ $\rho_0=1.02$. Tính K và các mode dao động tương ứng với 5 mode lớn nhất.

Bài làm

Phương trình truyền sóng có dạng:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0$$

Giải phương trình trên ta đi tìm nghiệm p với $p = p(r, z, t)$ là hàm của độ sâu z , phạm vi r , thời gian t .

Sử dụng phương pháp phân tách biến ta đưa hàm $p(r, z, t)$ về dạng $p(r, z, t) = p(r, z) \cdot s(t)$ với $s(t)$ là hàm phụ của thời gian có dạng:

$$s(t) = e^{-i\omega t} \quad (\text{với } \omega = 2\pi f)$$

Khi đó nghiệm của phương trình có dạng:

$$p(r, z, t) = p(r, z) e^{-i\omega t}$$

Biến đổi phương trình sóng về dạng phương trình Helmholtz :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} p = \frac{-\delta(z - z_\delta) \delta(r)}{2\omega r}$$

Sử dụng kỹ thuật tách biến ta đưa phương trình trên về dạng $p(r, z) = P(z) \cdot Q(r)$ chúng ta có:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \right] + \left[\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \right] P = 0$$

Hai thành phần trong ngoặc vuông ứng với hàm riêng của r và z tương ứng. Vì vậy, cách duy nhất để phương trình có thể thỏa mãn là nếu mỗi thành phần là một hằng số. Với hằng số K^2 phương trình đã cho có dạng:

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial P(z)}{\partial z} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 \right) P(z) = 0$$

Họ tên: Trần Thị Thảo

Mã sv: 12001682

Với điều kiện trong môi trường ta đang xét có mật độ không thay đổi = *constant*, vận tốc $c(z)$ là hàm tuyến tính theo độ sâu và với các điều kiện biên:

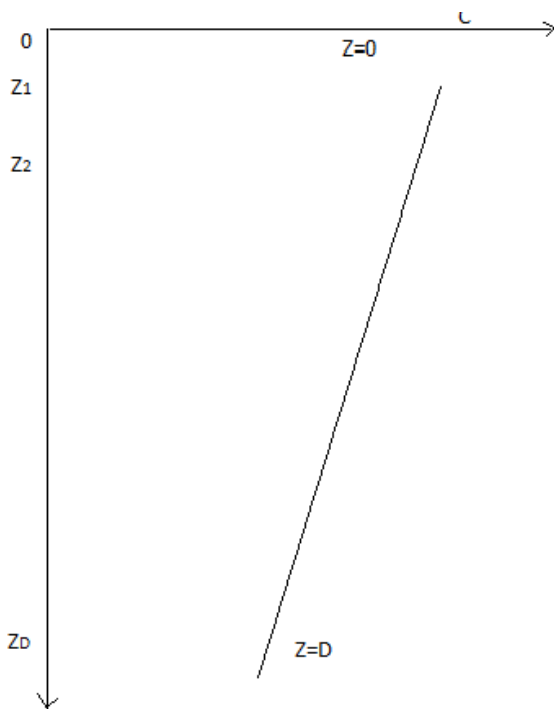
Mặt hở: $P(0)=0$

Đáy cứng: $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$

Phương trình cho P có dạng:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_z^2} - K_{H,m}^2 \right) P = 0$$

Để tìm nghiệm của phương trình ta chia sẽ chia lưới từ mặt tới đáy thành N điểm, áp dụng công thức sai phân để đưa phương trình đã cho về dạng $(A - K^2 I)P = 0$:



Các điều kiện biên:

Mặt hở: $P(0)=0$

Đáy cứng: $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$

Phương trình sai phân cho các điểm không biên:

Sử dụng phương pháp sai phân bậc 2 với bước sai phân bằng h có

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \bigg|_{z=z_1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} \bigg|_{z=z_1} - \frac{\partial P}{\partial z} \bigg|_{z=z_0}}{h}$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \bigg|_{z=z_1} = \frac{P_{z_0} - 2P_{z_1} + P_{z_2}}{h^2} = \frac{-2P_{z_1} + P_{z_2}}{h^2}$$

Họ tên: Trần Thị Thảo
Mã sv:12001682

$$\text{Hay } P_i'' = \frac{P_{i+1} + P_{i-1} - 2P_i}{h^2}$$

Thay vào phương trình

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - K^2\right)P = 0$$

Ta có tại điểm $Z = Z_i$

$$z = z_i : \frac{P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}}{h^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2\right)P_i = 0$$

$$\frac{1}{h^2} P_{i-1} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2}{h^2}\right)P_i + \frac{1}{h^2} P_{i+1} - k_2^2 P_i = 0$$

$$P_{i-1} + \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right)P_i + P_{i+1} - k_2^2 h^2 P_i = 0$$

Với $z_i = z_2, z_3, \dots, z_{D-1}$

Ta có kết quả

$$z = z_2 : P_1 + \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right)P_2 + P_3 + 0 + 0 + \dots + 0 - k_2^2 h^2 P_2 = 0$$

.....

$$z = z_{D-1} : 0 + 0 + \dots + P_{D-2} + \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right)P_{D-1} + P_D - k_{D-1}^2 h^2 P_{D-1} = 0$$

+) Xét tại điểm biên trên $Z = Z_1$ tại sát mặt biển với P tại $Z_0 = 0$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right|_{z=z_1} = \frac{\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{z=z_1} - \left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{z=z_0}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right|_{z=z_1} = \frac{P_{z_0} - 2P_{z_1} + P_{z_2}}{h^2} = \frac{-2P_{z_1} + P_{z_2}}{h^2}$$

$$z = z_1 : \frac{P_2 - 2P_1}{h^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_1^2\right)P_1 = 0$$

$$0 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2}{h^2}\right)P_1 + \frac{1}{h^2} P_2 - k_1^2 P_1 = 0$$

$$\left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right)P_1 + P_2 - k_1^2 h^2 P_1 = 0$$

Họ tên: Trần Thị Thảo
Mã sv:12001682

+) Xét tại điểm biên dưới $Z = Z_D$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=z_D} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right|_{z=z_D} = \frac{\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=z_D} - \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=z_{D-1}}}{h} = \frac{0 - P_D + P_{D-2}}{2h^2} = \frac{-P_D + P_{D-2}}{2h^2}$$

$$z = z_D : \frac{-P_D + P_{D-2}}{2h^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_D^2 \right) P_D = 0$$

$$\frac{1}{2h^2} P_{D-2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{2h^2} \right) P_D - k_D^2 P_D = 0$$

$$P_{D-2} + (-1 + 2h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_D - 2k_D^2 h^2 P_D = 0$$

Ta có kết quả

$$z = z_1 : (-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_1 + P_2 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 - k_1^2 h^2 P_1 = 0$$

$$z = z_2 : P_1 + (-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_2 + P_3 + 0 + 0 + \dots + 0 - k_2^2 h^2 P_2 = 0$$

.....

$$z = z_{D-1} : 0 + 0 + \dots + P_{D-2} + (-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_{D-1} + P_D - k_{D-1}^2 h^2 P_{D-1} = 0$$

$$z = z_D : 0 + 0 + 0 + \dots + P_{D-2} + 0 + (-1 + 2h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_D - 2k_D^2 h^2 P_D = 0$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$(A - K^2 I)P = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & (-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & (-1 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) \end{pmatrix}$$

Họ tên: Trần Thị Thảo

Mã sv:12001682

$$K = \begin{pmatrix} K_1^2 h^2 \\ K_2^2 h^2 \\ \dots \\ K_{D-1}^2 h^2 \\ K_D^2 h^2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_{D-1} \\ P_D \end{pmatrix}$$

Nghiem là N véc tơ v tương ứng với giá trị riêng K.

Áp dụng giải bài toán với các điều kiện:

Mặt biển phẳng, sâu 100m.

Vận tốc truyền âm là hàm tuyến tính theo độ sâu với giá trị vận tốc tại bề mặt là $c(0) = 1500$ m/s, tại đáy là $c(D) = 1450$ m/s.

Mật độ $\rho = 1.02$.

Tần số $f = 5000$ (Hz).

Đáy cứng.

Ta sẽ đi tính trường sóng của nguồn phát ở độ sâu 70m.

Cách giải:

Ta chia độ sâu thành 1000 điểm nút khoảng cách các điểm nút là 0.1 m.

Chương trình giải trên matlab:

```
function ffsong()  
    close all;  
    dh=.1;% dh= buoc chia  
    ro=1.02;% ro = mat do  
    f=5500;% f =tan so  
    D=100;% D= do sau  
    %c=1500;la toc truyền song tại đáy  
    N=ceil(D/dh);% so nut  
    clf;  
    c=linspace(1500,1450,N)% ham vận tốc tuyến tính  
    theo do sau  
    z=dh:dh:D;% do sau, xét trong hệ tọa độ de các  
  
    % giai voi dieu kien biên trên 1  
    A=make_model(dh,c,f,N); % tính ma trận A  
    [V,K]=SolveEigsA(A); % tính trị riêng
```

Họ tên: Trần Thị Thảo
Mã sv:12001682

```
% ve hình
figure(1);
subplot(1,4,1);
plot(V(:,1:5),z);
xlabel('v');
ylabel('do sau');
subplot(1,4,2);
% dua vec to V ve gia tri duong
for m=1:5
    V(:,m)=V(:,m).*(V(:,m)./(abs(V(:,m))))
end;

plot(V(:,1),z,'r');
xlabel('V mode 1');
ylabel('do sau');
hold on;
[K(:)]
% tinh truong song
mode =5;% tinh 5 mode lon nhat cua truong song
r = 100:1:1000;
r=r*1e3;
zSource = ceil(D/dh/(5/3));
Pzr=Pressure(K(1:mode),V(:,1:mode),r,zSource);
[zz rr]=meshgrid(z,r);
figure(2);
surface(rr,zz,abs(Pzr'));
shading interp
colorbar;

function A = make_model (adh,c,f,N)
    g=ones(1,N-1);
    omega=2*pi()*f;
    d=-2+adh.^2.*omega^2./c.^2.*ones(1,N);
    A=diag(d) + diag(g,1) + diag(g,-1);
    % diem o day
    A(end,end-1)=0
    A(end,end-2)=0

function [V,K]=SolveEigA(A)
    [V,K]=eig(A);
    K=diag(K);
    [K, index]=sort(K);
    index=flipud(index);
    K=flipud(K);
```

Họ tên: Trần Thị Thảo

Mã sv:12001682

```
K=sqrt(K);
```

```
V=fliplr(V);
```

```
function [V,K]=SolveEigsA(A)
```

```
[V,K]=eigs(sparse(A),50,'lm');
```

```
K=diag(K);
```

```
K=sqrt(K);
```

```
%
```

```
function Pzr=Pressure(K,V,r,zSource);
```

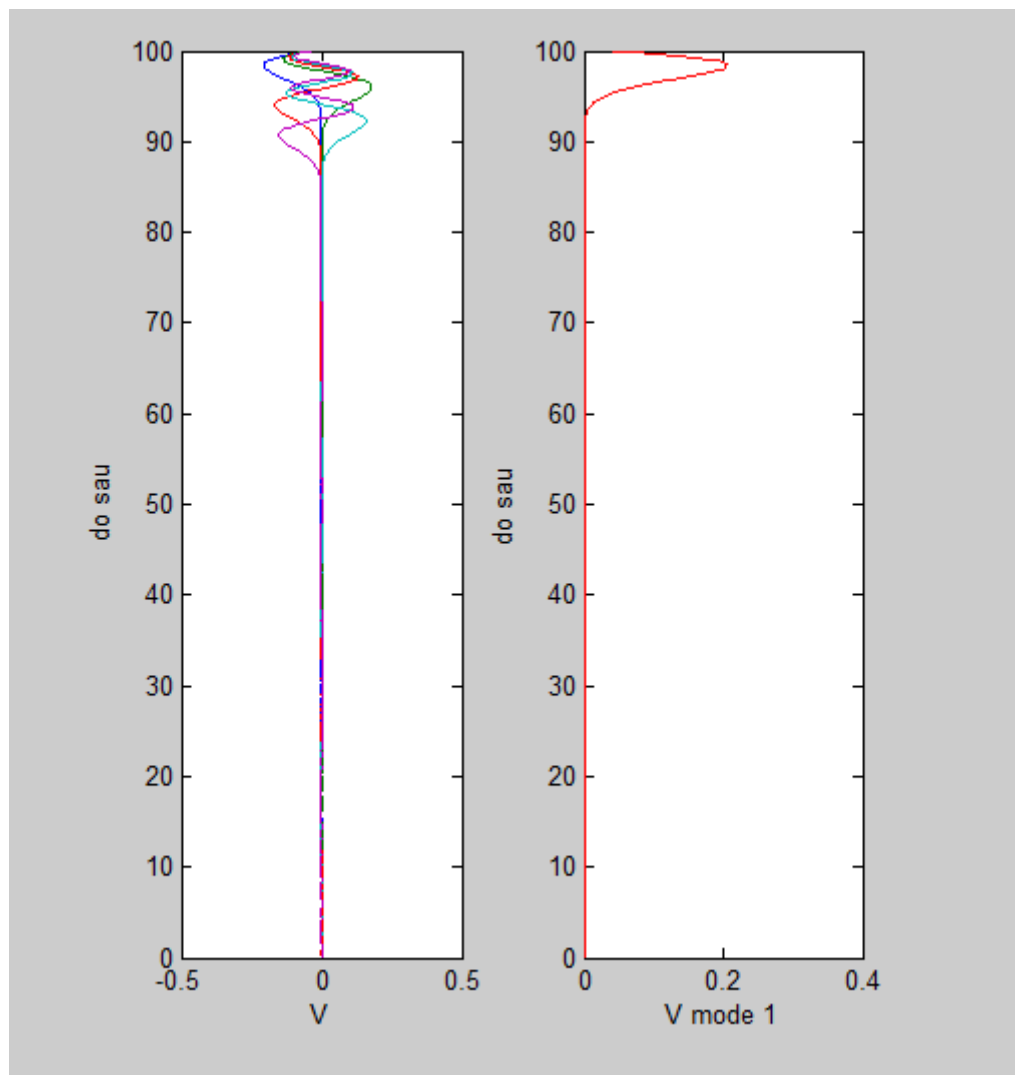
```
Pzk = V*diag(V(zSource,:));
```

```
Pkr = K(:)*reshape(r,1,length(r));
```

```
Pkr = exp(i*Pkr)./sqrt(Pkr);
```

```
Pzr = Pzk*Pkr *i*exp(i*pi()/4)/sqrt(8*pi);
```

Từ đó ta thu được kết quả: Véc tơ riêng ứng với 5 mode ta chọn và vec tơ riêng ứng với mode 1



Họ tên: Trần Thị Thảo
Mã sv:12001682

Và các trị riêng của ma trận Phân bố năng lượng:

A

5 trị riêng K max	5 trị riêng K min
2.3807	2.3432
2.3787	2.3426
2.3771	2.3420
2.3757	2.3415
2.3744	2.3409

