Họ tên : Pham Huyền Trang

Mã SV : 12002143

Lớp : 57HDH

**BÀI TẬP MÔN: PHƯƠNG PHÁP SỐ**

***Đề bài***: Cho phương trình sóng:

$$\left(∇^{2}-\frac{1}{c^{2}(z)}\frac{∂^{2}}{∂t^{2}}\right)p=0 $$

Giải bài toán tìm mode dao động sóng (tìm P trong phương trình P(z)). Với c(z) như sau: c(0)=1500, c(1000)= 1450 (c là hàm tuyến tính theo độ sâu). Mật độ $ρ\_{0}$=1.02, tính k và các mode dao động tương ứng với 5 mode lớn nhất (mode dao động là các hàm riêng liên kết với trị riêng k).

***Bài làm:***

Phương trình sóng:

$$\left(∇^{2}-\frac{1}{c^{2}(z)}\frac{∂^{2}}{∂t^{2}}\right)p=0 (1)$$

Áp dụng phương pháp phân tách biến trong hệ tọa độ trụ, giải tìm nghiệm của phương trình (1) dưới dạng:

$$p\left(r,z,t\right)=\sum\_{m=1}^{\infty }Q\_{m}\left(r\right)P\_{m}(z)e^{iωt}$$

Trong đó: P là áp suất âm,

 Qm(r) là hàm theo r

 $e^{iωt}$ là hàm phụ thuộc vào thời gian t (với $ω$ = 2πf, f là tần số)

$$p\left(r,z\right)=\sum\_{m=1}^{\infty }Q\_{m}\left(r\right)P\_{m}(z)$$

$$p\left(r,z\right)=\frac{i}{ρ(z\_{s})\sqrt{8πr}}e^{-iπ/4}\sum\_{m=1}^{\infty }P\_{m}\left(z\_{s}\right)P\_{m}(z)\frac{e^{ik\_{H,m}r}}{\sqrt{k\_{H,m}}}$$

$$Q\_{m}=\frac{i}{ρ(z\_{s})\sqrt{8πr}}e^{-iπ/4}P\_{m}\left(z\_{s}\right)\frac{e^{ik\_{H,m}r}}{\sqrt{k\_{H,m}}}$$

Với một giá trị $ω$ nhất định, nghiệm P phải thỏa mãn phương trình:

$$ρ\_{0}\left(z\right)\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{ρ\_{0}\left(z\right)}\frac{dP\_{m}\left(z\right)}{dz}\right]+ \left[\frac{ω^{2}}{c^{2}\left(z\right)}- k\_{H,m}^{2}\right]P\_{m}\left(z\right)= 0 (2)$$

 (ρ0 là mật độ, c là vận tốc lan truyền sóng, k là số sóng)

**Các điều kiện biên:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Mặt hở** | **Đáy cứng** | **Đk liên tục** |
| P(0)=0 | $$\frac{dP}{dz}│\_{z=N}=0$$ | $$\frac{dP}{dz}│\_{z=H^{-}}=\frac{dP}{dz}│\_{z=H^{+}}$$ |



Giả thiết mật độ ρ không đổi, phương trình (2) tương đương với phương trình:

$$\frac{d^{2}P\_{m}(z)}{dz^{2}}+ \left[\frac{ω^{2}}{c^{2}\left(z\right)}- k\_{H,m}^{2}\right]P\_{m}\left(z\right)=0 (3)$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn theo z.



Triển khai dãy Taylor của P:

$$P\_{i+1}= P\_{i}+P\_{i}^{'}h+P\_{i}^{''}\frac{h^{2}}{2!}+P\_{i}^{(3)}\frac{h^{3}}{3!}+…$$

$$P\_{i-1}= P\_{i}-P\_{i}^{'}h+P\_{i}^{''}\frac{h^{2}}{2!}-P\_{i}^{(3)}\frac{h^{3}}{3!}+…$$

Loại bỏ các bậc vô cùng bé ta có:

$$P\_{i+1}= P\_{i}+P\_{i}^{'}h+P\_{i}^{''}\frac{h^{2}}{2!}$$

$$P\_{i-1}= P\_{i}-P\_{i}^{'}h+P\_{i}^{''}\frac{h^{2}}{2!}$$

* $P\_{i+1}+P\_{i-1}=2P\_{i}+ 2P\_{i}^{''}\frac{h}{2!} $
* $P\_{i}^{''}= \frac{P\_{i+1}+P\_{i-1}- 2P\_{i}}{h^{2}} (\*)$

Thay (\*) vào phương trình (3), ta được phương trình viết cho các điểm không nằm trên biên:

$$\frac{P\_{i+1}-2P\_{i}+P\_{i-1}}{h^{2}}+ \left(\frac{ω^{2}}{c^{2}}- k^{2}\right)P\_{i}=0$$

$$\frac{1}{h^{2}}P\_{i-1}+\left(-\frac{2}{h^{2}}+\frac{ω^{2}}{c^{2}}\right)P\_{i}+ \frac{1}{h^{2}}P\_{i+1}- k^{2}P\_{i}=0$$

$$\frac{1}{h^{2}}\left(P\_{i-1}+ \left(-2+\frac{ω^{2}h^{2}}{c^{2}}\right)P\_{i}+P\_{i+1}\right)- k^{2}P\_{i}=0$$

Viết dưới dạng ma trận (A-I$k^{2})$P = 0

$$A= \left[\begin{matrix}\begin{matrix}d\_{0}\\g\_{1}\\\begin{matrix}0\\.\\\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}e\_{0}\\d\_{1}\\\begin{matrix}g\_{2}\\.\\\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0\\e\_{1}\\\begin{matrix}d\_{2}\\.\\\begin{matrix}g\_{N-2}\\0\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}e\_{2}\\.\\\begin{matrix}d\_{N-2}\\g\_{N-1}\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\.\\\begin{matrix}e\_{N-2}\\d\_{N-1}\\g\_{N}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\.\\\begin{matrix}0\\e\_{N-1}\\d\_{N}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right] P=\left[\begin{matrix}P\_{1}\\P\_{2}\\\begin{matrix}P\_{3}\\…\\\begin{matrix}P\_{N-2}\\P\_{N-1}\\P\_{N}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$$

Với
$$d= -\frac{2}{h^{2}}+\frac{ω^{2}}{c^{2}} , e=\frac{1}{h^{2}} , g=\frac{1}{h^{2}}$$

**Các điều kiện biên:**

**Bề mặt tự do:**

Trên bề mặt tự do, áp suất âm tại bề mặt là bằng 0 nên chúng ta có thể đơn giản loại bỏ hàng đầu tiên của ma trận A.

**Đáy cứng:**

Với đáy cứng, điều kiện biên sẽ là

$$\frac{dP\_{N}}{dz}=0 $$

Ta có:

$$\frac{d^{2}P\_{N}}{dz^{2}}= \frac{-\frac{dP\_{N-1}}{dz}+ \frac{dP\_{N}}{dz}}{h}= \frac{-\frac{dP\_{N-1}}{dz}}{h}= -\frac{P\_{N}-P\_{N-1}}{h^{2}}$$

Thay vào phương trình (3) ta được:

$$\frac{1}{h^{2}}P\_{N-1}+ \left(-\frac{1}{h^{2}}+ \frac{ω^{2}}{c^{2}}\right)P\_{N}-k^{2}P\_{N}=0$$

**Điều kiện liên tục**

****

Trên mặt biên giữa 2 lớp, nơi có sự biến đổi không liên tục của vận tốc và mật độ, các điều kiện liên tục ở đây là áp suất âm P phải liên tục trên mặt phân cách. Giả sử mật độ ρ biến đổi không đáng kể (ρ=constant), ta có điều kiện liên tục:

$$P\_{w}^{'}\left(H^{-}\right)= P\_{w}^{'}\left(H^{+}\right)$$

Điều kiện này được xấp xỉ bằng công thức:

$$\left[\frac{P\_{M}- P\_{M-1}}{h\_{w}}-(\frac{ω^{2}}{c\_{w}^{2}}-k^{2})\frac{h\_{w}}{2}P\_{M}\right]=\left[\frac{P\_{M+1}- P\_{M}}{h\_{s}}-(\frac{ω^{2}}{c\_{s}^{2}}-k^{2})\frac{h\_{s}}{2}P\_{M}\right] $$

Bài toán bây giờ trở thành bài toán hàm riêng trị riêng.

Giải bài toán trên ngôn ngữ lập trình Matlab.

Chia bước lưới với dh=1m, độ sâu D=1000m, số nút lưới N bằng 1000.

function ffsong()

 close all; % dong tat ca hinh anh (do thi) hien tai

 dh=1; % buoc chia luoi

 ro=1.02; % mat do

 f=5500; %tan so

 D=1000; % do sau

 N=ceil(D/dh);% so nut luoi(lam tron ve so nguyen lon hon)

 c=linspace(1500,1450,N);%tao vector co gia tri ngau nhien trong khoang dinh truoc (1500,1450)và N la so phan tu cua vector

 clf; %xoa hinh anh(do thi)hien tai

 z=dh:dh:D; %khai bao do sau z

 % giai voi dieu kien bien tren 1

 A=make\_model(dh,c,f,N);% tao mot ma tran mo hinh A

 [V,K]=SolveEigsA(A);

 %chuan hoa vecto V(i,1:5)

for i=1:N;

 V(i,1:5)=V(i,1:5)\*(V(i,1:5)/(abs(V(i,1:5))));

end;

 %ve van toc c va mot so mode lon nhat

 figure(1); % tao moi hinh anh 1(do thi 1)

 subplot(1,5,1);

 plot(c,z);

 view(0,-90);

 subplot(1,5,2);

 plot(V(:,1),z);

 view(0,-90);

 subplot(1,5,3);

 plot(V(:,2),z);

 view(0,-90);

 subplot(1,5,4);

 plot(V(:,3),z);

 view(0,-90);

 subplot(1,5,5);

 plot(V(:,4),z);

 view(0,-90);

 hold on;

 K(:) % xuat ra gia tri cua K

 % tinh truong song

 mode =5;

 r = 100:1:1000;

 r=r\*1e3;

 zSource = ceil(D/dh/(5/3));

 Pzr=Pressure(K(1:mode),V(:,1:mode),r,zSource);

 [zz rr]=meshgrid(z,r);

 figure(2);

 surface(rr,zz,abs(Pzr'));

 shading interp

 colorbar;

function A = make\_model(dh,c,f,N); %tao mot ma tran mo hinh A

 g=ones(1,N-1); %tao ma tran g co 1 hang, N-1 cot và tat ca cac phan tu deu bang 1

 omega=2\*pi()\*f; %gan omega bang 2\*pi\*f

 d=-2+dh.^2.\*omega^2./c.^2.\*ones(1,N);

 A=diag(d) + diag(g,1) + diag(g,-1); %tao ma tran A voi 1 duong cheo chinh và 2 duong cheo phu

 A(1,2)=0; % dieu kien bien tai be mat tu do

 A(1:5,1:5)% xuat ra gia tri tu hang 1 den hang 5, tu cot 1 den cot 5 cua ma tran A

 A(end-4:end,end-4:end) )% xuat ra gia tri 5 hang cuoi cua 5 cot cuoi cung cua ma tran A

function [V,K]=SolveEigA(A)

 [V,K]=eig(A); %tinh gia tri vector rieng và tri rieng

 K=diag(K); %tao ma tran duong cheo co so hang bang so cot va cac phan tu cua vector K nam tren duong cheo chinh

 [K, index]=sort(K);

 index=flipud(index); % chuyen cac phan tu cua cac ma tran theo thu tu cot nguoc lai

 K=flipud(K);

 K=sqrt(K) % gan K bang can bac 2 cua K va xuat ra gia tri K

 V=fliplr(V);

function [V,K]=SolveEigsA(A)

 [V,K]=eigs(sparse(A),50,'lm');

 K=diag(K);

 K=sqrt(K);

function Pzr=Pressure(K,V,r,zSource);

 Pzk = V\*diag(V(zSource,:));

 Pkr = K(:)\*reshape(r,1,length(r));

 Pkr = exp(i\*Pkr)./sqrt(Pkr);

 Pzr = Pzk\*Pkr \*i\*exp(-i\*pi()/4)/sqrt(8\*pi);

**Kết quả**

 **Ma trận A**

$$\left[\begin{matrix}528.7654&0&0&0&0&…&0&0&0&0&0\\1&528.8008&1&0&0&…&0&0&0&0&0\\0&1&528.8362&1&0&…&0&0&0&0&0\\0&0&1&528.8717&1&…&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&528.9071&…&0&0&0&0&0\\…&…&…&…&…&…&…&…&…&…&…\\0&0&0&0&0&…&565.8442&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&…&1&565.8834&1&0&0\\0&0&0&0&0&…&0&1&565.9226&1&0\\0&0&0&0&0&…&0&0&1&565.9618&1\\0&0&0&0&0&…&0&0&0&1&566.0010\end{matrix}\right]$$

**5 trị riêng của 5 mode lớn nhất**

23.8280

23.8238

23.8204

23.8174

23.8147

**Hình vẽ**



Hình 1: Vận tốc và một số mode dao động



Hình 2: Bức tranh sóng