

Họ và tên :Phùng Quốc Trung

Mã sinh viên : 12000986

Lớp : K57HDH

BÀI TẬP HẾT MÔN

MÔN HỌC : PHƯƠNG PHÁP SỐ TRONG HẢI DƯƠNG HỌC

Đề bài: Cho phương trình sóng

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) P = 0$$

Giải bài toán tìm mode dao động sóng (tìm P trong pt P(t)

Với c(z) : C(0)=1500

c= hàm tuyến tính theo độ sâu

C(1000)=1450

Với mật độ $\rho_0=1.02$. Tính K và các mode dao động tương ứng với 5 mode lớn nhất.

Bài làm:

Phương trình truyền sóng có dạng:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0$$

Giải phương trình trên ta đi tìm nghiệm p với $p = p(r, z, t)$ là hàm của độ sâu z, phạm vi r, thời gian t.

Sử dụng phương pháp phân tách biến ta đưa hàm $p(r, z, t)$ về dạng $p(r, z, t) = p(r, z) \cdot s(t)$ với s(t) là hàm phụ của thời gian có dạng:

$$s(t) = e^{-i\omega t} \quad (\text{với } \omega = 2\pi f)$$

Khi đó nghiệm của phương trình có dạng:

$$p(r, z, t) = p(r, z) e^{-i\omega t}$$

Biến đổi phương trình sóng về dạng phương trình Helmholtz :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} p = \frac{-\delta(z - z_\delta) \delta(r)}{2\omega r}$$

Sử dụng kỹ thuật tách biến ta đưa phương trình trên về dạng $p(r, z) = P(z) \cdot Q(r)$ chúng ta có:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) \right] + \left[\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \right] = 0$$

Hai thành phần trong ngoặc vuông đứng với hàm riêng của và tương ứng. Vì vậy, cách duy nhất để phương trình có thể thỏa mãn là nếu mỗi thành phần là một hằng số. Với hằng số K^2 phương trình đã cho có dạng:

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial P(z)}{\partial z} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 \right) P(z) = 0$$

Với điều kiện trong môi trường ta đang xét có mật độ không thay đổi = *constant*, vận tốc $c(z)$ là hàm tuyến tính theo độ sâu và với các điều kiện biên:

$$\text{Mặt hở : } P(0)=0$$

$$\text{Đáy cứng: } \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\text{Điều kiện liên tục: } \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=H^+} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=H^-}$$

Phương trình cho P có dạng :

$$\frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_z^2} - K_{H,m}^2 \right) P_z = 0$$

Để tìm nghiệm của phương trình ta chia sẽ chia lưới từ mặt tới đáy thành N điểm, áp dụng công thức sai phân để đưa phương trình đã cho về dạng $(A-K^2I)P=0$:

Xét tại các điểm không nằm trên biên: $Z = Z_2, Z_3 \dots Z_{D-1}$

$$z = z_2 : \frac{P_1 - 2P_2 + P_3}{h^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2 \right) P_2 = 0$$

$$\frac{1}{h^2} P_1 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2}{h^2} \right) P_2 + \frac{1}{h^2} P_3 - k_2^2 P_2 = 0$$

$$P_1 + \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) P_2 + P_3 - k_2^2 h^2 P_2 = 0$$

Ta có kết quả tương tự tại các điểm $Z = Z_3, Z_4, \dots, Z_{D-1}$

Xét điểm Z_0 tại biên trên mặt: $P(Z_0)=0$

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial z^2} \Big|_{z=z_1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{z=z_1} - \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{z=z_0}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 P^2}{\partial z^2} \right|_{z=z_1} = \frac{P_{z_0} - 2P_{z_1} + P_{z_2}}{h^2} = \frac{-2P_{z_1} + P_{z_2}}{h^2}$$

$$z = z_1 : \frac{P_2 - 2P_1}{h^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_1^2 \right) P_1 = 0$$

$$0 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2}{h^2} \right) P_1 + \frac{1}{h^2} P_2 - k_1^2 P_1 = 0$$

$$(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_1 + P_2 - k_1^2 h^2 P_1 = 0$$

Xét điểm tại biên đáy $Z=Z_D$:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=z_D} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right|_{z=z_D} = \frac{\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=z_D} - \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=z_{D-1}}}{h} = \frac{P_{D-1} - P_D}{h^2}$$

$$z = z_D : \frac{-P_D + P_{D-1}}{h^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_D^2 \right) P_D = 0$$

$$\frac{1}{h^2} P_{D-1} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{h^2} \right) P_D - k_D^2 P_D = 0$$

$$P_{D-1} + (-1 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_D - k_D^2 h^2 P_D = 0$$

Ta có kết quả

$$z = z_1 : (-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_1 + P_2 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 - k_1^2 h^2 P_1 = 0$$

$$z = z_2 : P_1 + (-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_2 + P_3 + 0 + 0 + \dots + 0 - k_2^2 h^2 P_2 = 0$$

.....

$$z = z_{D-1} : 0 + 0 + \dots + P_{D-2} + (-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_{D-1} + P_D - k_{D-1}^2 h^2 P_{D-1} = 0$$

$$z = z_D : 0 + 0 + 0 + \dots + P_{D-1} + 0 + (-1 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}) P_D - k_D^2 h^2 P_D = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \left(-2 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \left(-1 + h^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1^2 h^2 \\ K_2^2 h^2 \\ \dots \\ K_{D-1}^2 h^2 \\ K_D^2 h^2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_{D-1} \\ P_D \end{bmatrix}$$

Nghiệm là N véc tơ v tương ứng với giá trị riêng K.

Áp dụng giải bài toán với các điều kiện:

Mặt biển phẳng, sâu 100m.

Vận tốc truyền âm là hàm tuyến tính theo độ sâu với giá trị vận tốc tại bề mặt là $c(0) = 1500 \text{ m/s}$, tại đáy là $c(D) = 1450 \text{ m/s}$.

Mật độ $\rho = 1.02$.

Tần số $f = 5500 \text{ (Hz)}$.

Đáy cứng.

Ta sẽ đi tính trường sóng của nguồn phát ở độ sâu 70m.

Cách giải:

Ta chia độ sâu thành 1000 điểm nút khoảng cách các điểm nút là 0.1 m.

Bài giải trên MATLAB :

```
function ftsong()
    close all;
    dh=.1;
    rho=1.02;
    f=5500;
    D=100;
    c=1500;
    N=ceil(D/dh);          % N là số nút lưới
    c=linspace(1500,1450,N); % tạo một vector có giá trị ngẫu nhiên để gh
    clf;
    z=dh:dh:D;
    % điều kiện biên trên
    figure(1);
    A=make_model(dh,c,f,N);
    [V,K]=SolveEigsA(A);
    % phân vẽ
    subplot(1,4,1);          % tạo cấu trúc trong một phân cấu trúc số độ hòa số hàng và số cột
    % được chia sau đó chọn vùng để vẽ
    plot(V(:,1:5),z);          % (hình thứ 1) vẽ đồ thị tùy chỉnh trong không gian 2 chiều, vẽ giá trị
    % x theo giá trị y
    subplot(1,4,4);
    plot(V(:,1)*V(10,1)/abs(V(10,1)),z,'r');
    hold on;
    % view(0,-90);
    A=make_model_1(dh,c,f,N);
    [V,K1]=SolveEigsA(A);
    % phân vẽ
    subplot(1,4,2);
    plot(V(:,1:5),z);
    subplot(1,4,4);
    plot(V(:,1)*V(10,1)/abs(V(10,1)),z,'r-*');
    hold on;
```

```

%view(0,-90);

A=make_model_2(dh,c,f,N);
[V,K2]=SolveEigsA(A);
subplot(1,4,3);
plot(V(:,1:5),z);
subplot(1,4,4);
plot(V(:,1)*V(10,1)/abs(V(10,1)),z,'g');
hold on;
[ K(:) K1(:) K2(:)]

% tinhtruong song
mode =5;
r = 100:1:1000;
r=r*1e3;

% P= P tainguon
zSource = ceil(D/dh/(10/6));
Pzr=Pressure(K(1:mode),V(:,1:mode),r,zSource);
[zzrr]=meshgrid(z,r);
figure(2);
surface(rr,zz,abs(Pzr'));
shading interp;
colorbar;

function A = make_model (adh,c,f,N)
g=ones(1,N-1);
omega=2*pi()*f;
d=-2+adh.^2.*omega^2./c.^2.*ones(1,N);
A=diag(d) + diag(g,1) + diag(g,-1);

function A = make_model_1 (dh,c,f,N)
g=ones(1,N-1);
omega=2*pi()*f;
d=-2+dh.^2.*omega^2./c.^2.*ones(1,N);
A=diag(d) + diag(g,1) + diag(g,-1);
A(1,2)=0;

function A = make_model_2 (dh,c,f,N)

```

```

g=ones(1,N-1);
omega=2*pi()*f;
d=-2+dh.^2.*omega^2./c.^2.*ones(1,N);
A=diag(d) + diag(g,1) + diag(g,-1);
A(1,2)=0.5;
function [V,K]=SolveEigA(A)
[V,K]=eig(A)
K=diag(K);
[K, index]=sort(K);
index=flipud(index); % dao hang tutrenxuongduoi
K=flipud(K);
K=sqrt(K);
%V=fliplr(V);
function [V,K]=SolveEigsA(A)
[V,K]=eigs(sparse(A),50,'lm')
K=diag(K);
K=sqrt(K);

Function Pzr=Pressure(K,V,r,zSource);
Pzk = V*diag(V(zSource,:));
Pkr = K(:)*reshape(r,1,length(r));
Pkr = exp(i*Pkr)./sqrt(Pkr);
Pzr = Pzk*Pkr *i*exp(i*pi()/4)/sqrt(8*pi);

```

	K	K1	K2
1	2.3807	2.3807	2.3807
2	2.3788	2.3772	2.3788
3	2.3772	2.3788	2.3772
4	2.3757	2.3757	2.3757
5	2.3744	2.3744	2.3744
6	2.3732	2.3732	2.3732
7	2.3721	2.3721	2.3710
8	2.3710	2.3710	2.3721
9	2.3700	2.3700	2.3700
10	2.3690	2.3690	2.3690
11	2.3680	2.3680	2.3680
12	2.3671	2.3662	2.3671
13	2.3662	2.3671	2.3662
14	2.3653	2.3653	2.3653
15	2.3644	2.3644	2.3644
16	2.3636	2.3636	2.3636
17	2.3628	2.3628	2.3628
18	2.3620	2.3612	2.3620
19	2.3612	2.3620	2.3612
20	2.3604	2.3604	2.3604
21	2.3596	2.3596	2.3589

22	2.3589	2.3589	2.3596
23	2.3581	2.3581	2.3581
24	2.3574	2.3574	2.3574
25	2.3567	2.3567	2.3567
26	2.3560	2.3560	2.3560
27	2.3553	2.3553	2.3553
28	2.3546	2.3546	2.3546
29	2.3539	2.3539	2.3539
30	2.3532	2.3532	2.3532
31	2.3525	2.3525	2.3525
32	2.3519	2.3519	2.3519
33	2.3512	2.3512	2.3512
34	2.3506	2.3506	2.3506
35	2.3499	2.3499	2.3499
36	2.3493	2.3493	2.3493
37	2.3487	2.3487	2.3487
38	2.3481	2.3481	2.3481
39	2.3474	2.3474	2.3474
40	2.3468	2.3468	2.3468
41	2.3462	2.3462	2.3462
42	2.3456	2.3456	2.3456
43	2.3450	2.3450	2.3450

44	2.3444	2.3444	2.3444
45	2.3439	2.3439	2.3439
46	2.3433	2.3433	2.3433
47	2.3427	2.3427	2.3427
48	2.3421	2.3421	2.3421
49	2.3416	2.3416	2.3416
50	2.3410	2.3410	2.3410