**BÀI TẬP HẾT MÔN**

MÔN: PHƯƠNG PHÁP SỐ TRONG HẢI DƯƠNG HỌC

SINH VIÊN: NGUYỄN THỊ KHANG

MÃ SV: 12001502

LỚP: K57 HẢI DƯƠNG HỌC

Đề bài: Cho phương trình sóng giải bài toán tìm mode dao động sóng (tìm P trong phương trình P(z)). Với c(z): c(o)=1500, c(1000)=1450 ( c là hàm tuyến tính theo độ sâu. Mật độ ρo=1.02. Tìm K, các mode dao động tương ứng với 5 mode lớn nhất.

Bài làm:

1. **LÝ THUYẾT**

Ta có phương trình truyền sóng

$$\left(∇^{2}-\frac{1}{c^{2}(z)}\frac{∂^{2}}{∂t^{2}}\right)p=0 (1)$$

Trong đó:

$∇$ là toán tử Laplace

c là hằng số đặc trưng cho tốc độ lan truyền sóng

p là áp suất âm



Chuyển sang miền tần số:

$$p=A\left(r,z\right) $$

Thay vào phương trình sóng và sau đó đơn giản ta có phương trình vi phân:

$$∇^{2}A+\frac{ω^{2}}{c^{2}}A=\left(∇^{2}+k^{2}\right)A=0$$

$ω=kc$ với k là vector sóng và $ω $là tần số góc

Do vậy ta có thể viết lại

$∇^{2}A+k^{2}A=\left(∇^{2}+k^{2}\right)A=0$ (2)

Do bản chất của nghiệm phỏng đoán cho P, P thỏa mãn

$$\frac{d^{2}P}{dt^{2}}+ ω^{2}P=\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}+ω^{2}\right)P=0 $$

Trong hệ tọa độ trụ, phương trình (2) trở thành

$$\frac{1}{r}\frac{∂}{∂r}\left(r\frac{∂A}{∂r}\right)+\frac{1}{r^{2}}\frac{∂^{2}A}{∂φ^{2}}+\frac{∂^{2}A}{∂z^{2}}+k^{2}A=0 (3)$$

Không xét thành phần $φ$. Ta tìm nghiệm dưới dạng $A=Q\left(r\right)P(z)$

Thay A vào phương trình (3) sau đó chia cho A ta được:

$$\frac{1}{rQ}\frac{∂}{∂r}\left(r\frac{∂Q}{∂r}\right)+\frac{1}{P}\frac{∂^{2}P}{dz^{2}}+k^{2}=0 (4)$$

Thực hiện tách biến cho từng biến

$$\frac{1}{P}\frac{∂^{2}P}{dz^{2}}= -k\_{z}^{2}$$

Thay lại vào phương trình (4)

$$\frac{1}{rQ}\frac{∂}{∂r}\left(r\frac{∂Q}{∂r}\right)+k^{2}-k\_{z}^{2}=0 (5)$$

Đặt : $k\_{r}^{2}= k^{2}-k\_{z}^{2}$ thay vào phương trình (5) và nhân cả hai vế của phương trình với *r2Q*  ta được

$$r\frac{∂}{∂r}\left(r\frac{∂Q}{∂r}\right)+k\_{r}^{2}r^{2}Q=0$$

$$\frac{∂^{2}P}{dz^{2}}+k\_{z}^{2}P=0$$

$$k^{2}=k\_{z}^{2}+k\_{r}^{2}$$

Tóm lại:

Bằng phương pháp phân tách biến trong hệ tọa độ trụ giải tìm được nghiệm p dưới dạng:

$$p\left(r,z\right)=\sum\_{m=1}^{\infty }Q\_{m}\left(r\right)P\_{m}\left(z\right)$$

Trong đó: Q là phương trình Bessel bậc 0 và bậc 1

$$Q\left(r\right)= \frac{i}{ρ\left(z\_{s}\right)\sqrt{8πr}}e^{-\frac{iπ}{4}}P\_{m}(z\_{s})\frac{e^{ik\_{H,m}r}}{\sqrt{k\_{H,m}}}$$

ρ là mật độ, k là số sóng

P là hàm theo độ sâu. Phương trình của P có dạng:

$$\frac{d^{2}P\_{m}(z)}{dz^{2}}+ \left[\frac{ω^{2}}{c^{2}\left(z\right)}- k\right]P\_{m}\left(z\right)=0 (6)$$

ω = 2πf với f là tần số ,

 c là vận tốc truyền sóng,

 k là số sóng

Để tìm nghiêm p trong phương trình truyền sóng ta cần tính P và Q. Q được tính thông qua P.

Do đó yêu cầu của bài toán là tìm P trong phương trình (6)

**Giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn**

* ***Mô hình***

z = 1000 m

c(0) = 1500, c(1000) = 1450

c là hàm tuyến tính theo độ sâu

Đáy cứng hoàn toàn, mặt biển hở



Mô hình vật lý của bài toán

Chia bước lưới với bước chia h=1m, dộ sâu D=1000m, số bước chia N = 1000



* ***Phương trình cho các điểm không ở biên*:**

Dựa vào khai triển Taylor và loại bỏ các vô cùng bé bậc cao ta có

$$\frac{d^{2}P}{dz^{2}}= \frac{P\_{i+1}-2P\_{i}+P\_{i-1}}{h^{2}} với i=2,3,…,N-1$$

Thay vào phương trình (6)

$$\frac{P\_{i+1}-2P\_{i}+P\_{i-1}}{h^{2}}+ \left(\frac{ω^{2}}{c^{2}}- k^{2}\right)P\_{i}=0$$

$$\frac{1}{h^{2}}P\_{i-1}+\left(-\frac{2}{h^{2}}+\frac{ω^{2}}{c^{2}}\right)P\_{i}+ \frac{1}{h^{2}}P\_{i+1}- k^{2}P\_{i}=0$$

* ***Phương trình của áp suất âm trên lớp biên***

Các điểm ở biên chọn sai phân tiến hoặc lùi.

$$\frac{dp}{dz}= \frac{P\_{i+1}-P\_{i}}{h}= \frac{P\_{i}-P\_{i-1}}{h}$$

*Điều kiện biên*

* Đáy cứng:

$$\frac{dP\_{N}}{dz}=0 $$

Ta có

$$\frac{d^{2}P\_{N}}{dz^{2}}= \frac{-\frac{dP\_{N-1}}{dz}+ \frac{dP\_{N}}{dz}}{h}= \frac{-\frac{dP\_{N-1}}{dz}}{h}= -\frac{P\_{N}-P\_{N-1}}{h^{2}}$$

Thay vào phương trình (6) ta được

$$\frac{1}{h^{2}}P\_{N-1}+ \left(-\frac{1}{h^{2}}+ \frac{ω^{2}}{c^{2}}\right)P\_{N}-kP\_{N}=0$$

* Bề mặt tự do: trên bề mặt tự do áp suất âm tại bề mặt bằng 0.
* Tại điểm z1

$$\frac{d^{2}P\_{1}}{dz^{2}}= \frac{\frac{dP\_{1}}{dz}- \frac{dP\_{0}}{dz}}{h}= \frac{\frac{P\_{2}-P\_{1}}{h}-\frac{P\_{1}-P\_{0}}{h}}{h}= \frac{P\_{2}-2P\_{1}}{h^{2}}$$

Thay vào phương trình (6) ta được:

$$\left(-\frac{2}{h^{2}}+\frac{ω^{2}}{c^{2}}\right)P\_{1}+ \frac{1}{h^{2}}P\_{2}- k^{2}P\_{1}=0$$

*Điều kiện liện tục*:

 Do c là hàm tuyến tính theo độ sâu, đáy cứng hoàn toàn nên bỏ qua điều kiện liên tục

Các phương trình của bài toán có thể viết thành dạng $\left(A-k^{2}I\right)P=0$

Với A là ma trận mô hình, P là vecto áp suất âm

$$A= \left[\begin{matrix}\begin{matrix}d\_{1}\\g\_{2}\\\begin{matrix}0\\.\\\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}e\_{1}\\d\_{2}\\\begin{matrix}g\_{3}\\.\\\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0\\e\_{2}\\\begin{matrix}d\_{3}\\.\\\begin{matrix}g\_{N-2}\\0\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}e\_{3}\\.\\\begin{matrix}d\_{N-2}\\g\_{N-1}\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\.\\\begin{matrix}e\_{N-2}\\d\_{N-1}\\g\_{N}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\.\\\begin{matrix}0\\e\_{N-1}\\d\_{N}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right] P=\left[\begin{matrix}P\_{1}\\P\_{2}\\\begin{matrix}P\_{3}\\…\\\begin{matrix}P\_{N-2}\\P\_{N-1}\\P\_{N}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right]$$

$$d\_{i=1,N-1}= -\frac{2}{h^{2}}+\frac{ω^{2}}{c\_{i}^{2}} , e=\frac{1}{h^{2}} , g=\frac{1}{h^{2}}$$

$$d\_{N}= -\frac{1}{h^{2}}+\frac{ω^{2}}{c\_{i}^{2}}$$

Bài toán bây giờ trở thành bài toán hàm riêng trị riêng. Nghiệm là N vector riêng V tương ứng với mỗi giá trị riêng K.

Giải bài toán trên ngôn ngữ lập trình Matlab

1. **CHƯƠNG TRÌNH TÍNH**

Chương trình Matlab giải bài toán

function ftsong()

 dh=.1; %buoc chia

 f=5500; % tan so

 D=20; % do sau

 N=ceil(D/dh); % so buoc chia

 c=linspace(1500,1470,N);

 % cach khac cua c: c = [1500:-(1500-1450)/N:1450];

 z=dh:dh:D;

 %giai voi dieu kien bien

 A=make\_model(dh,c,f,N);

 [V,K]=SolveEigsA(A);

 % phan ve van toc va cac mode lon nhat

 figure(1);

 subplot(1,5,1);

 plot(c,z);

 view(0,-90);

 subplot(1,5,2);

 plot(V(:,1),z);

 view(0,-90);

 subplot(1,5,3);

 plot(V(:,2),z);

 view(0,-90);

 subplot(1,5,4);

 plot(V(:,3),z);

 view(0,-90);

 subplot(1,5,5);

 plot(V(:,4),z);

 view(0,-90);

 hold on;

 [K(:)];%vector tri rieng

function A = make\_model(dh,c,f,N)

 g=ones(1,N-1);

 omega=2\*pi()\*f;

 d=-2+dh.^2.\*omega^2./c.^2;

 A=diag(d)+diag(g,1)+diag(g,-1); % ma tran mo hinh

 A(1,2)=0.5; % dieu kien bien

function [V,K]=SolveEigsA(A)

 [V,K]=eigs(sparse(A),50,'lm');

 % chuan hoa vecto V

 a=V(1,:);

 b=abs(V(1,:));

 dau = a.\*(b.^(-1));

 dau = diag(dau);

 V = V\*dau;

 %%%%%%%%%%%

 K=diag(K);

 K=sqrt(K);

1. **KẾT QUẢ**
* 5 trị riêng của 5 mode lớn nhất là:

23.8280

 23.8238

 23.8204

 23.8174

 23.8147



**Hình 1: vận tốc và các mode dao động**

* Nhận xét:

Năng lượng sóng tập trung ở phần từ nguồn xuống đến đáy

Càng gần nguồn phát sóng thì năng lượng sóng càng lớn.

Các mode càng lớn ( mode3, mode 4…) thì mật độ năng lượng càng tăng